CALCULO INFINITESIMAL

1.ª PARTE

PROF MARIO R. AZOCAR

SANTIAGO

1948

siendo h un racional mayor que el a_2 considerado, entonces:

$$a_2^n - a_1^n < e$$

De aquí entonces que las clases A_1^n y A_2^n definan un número real y de acuerdo con esto daremos la siguiente definición:

Dado un número real $\alpha = (A_1,A_2)$ definido en el campo de los racionales positivos y un entero positivo n, llamaremos potencia n-ésima de α al número real definido por las clases A_1^n y A_2^n. Este número lo designaremos por el símbolo α^n y pondremos:

$$(\alpha)^n = \alpha^n$$

Teorema 15°.-

$$\alpha^n \cdot \alpha^m = \alpha^{n+m}$$

D.-

Sea $\alpha = (A_1,A_2)$ un número real, definido en el campo de los racionales positivos, los números α^n y α^m están definidos entonces por las clases A_1^n, A_2^n y A_1^m, A_2^m respectivamente.

Ahora de acuerdo con la definición de producto de números reales, el número $\alpha^n \cdot \alpha^m$ estará definido por las clases $A_1^n \cdot A_1^m$, $A_2^n \cdot A_2^m$ donde la primera clase está formada por los números del tipo $a_1^n \cdot a_1^m$ y la segunda por números del tipo $a_2^n \cdot a_2^m$, y puesto que:

$$a_1^n \cdot a_1^m = a_1^{n+m} \quad \text{y} \quad a_2^n \cdot a_2^m = a_2^{n+m}$$

dichas clases son idénticas con las clases A_1^{n+m} y A_2^{n+m} que son las que definen el número α^{n+m}, de aquí entonces que: $\alpha^{n} \cdot \alpha^{m} = \alpha^{n+m}$

Teorema 16°.-

$$\alpha^{n} \cdot \beta^{n} = (\alpha \cdot \beta)^{n}$$

D.-

Sean $\alpha = (A_1, A_2)$ y $\beta = (B_1, B_2)$ dos número reales definidos en el campo de los racionales positivos. De acuerdo con esto se comprende que los números α^{n}; β^{n} y $\alpha^{n} \cdot \beta^{n}$ estarán definidos por las clases A_1^{n}, A_2^{n}, B_1^{n}, B_2^{n} y $A_1^{n} \cdot B_1^{n}$, $A_2^{n} \cdot B_2^{n}$ respectivamente.

Ahora teniendo en cuenta que:

$$a_1^{n} \cdot b_1^{n} = (a_1 \cdot b_1)^{n} \qquad y \qquad a_2^{n} \cdot b_2^{n} = (a_2 \cdot b_2)^{n}$$

se vé que las clases $A_1^{n} \cdot B_1^{n}$, $A_2^{n} \cdot B_2^{n}$ son idénticas a las clases $\overline{A_1 \cdot A_2}^{\,n}$, $\overline{B_1 \cdot B_2}^{\,n}$ que definen el número $(\alpha \cdot \beta)^{n}$, de ahí entonces que: $\alpha^{n} \cdot \beta^{n} = (\alpha \cdot \beta)^{n}$.

Teorema 17°.-

$$(\alpha^{n})^{m} = \alpha^{n \cdot m}$$

D.-

Sea $\alpha = (A_1, A_2)$ un número real definido en el campo de los racionales positivos, entonces el número α^{n} está definido por las clases A_1^{n}, A_2^{n} y por consiguiente $(\alpha^{n})^{m}$ por las clases $(A_1^{n})^{m}$, $(A_2^{n})^{m}$ cuyos elementos son números de la forma: $(a_1^{n})^{m}$ y $(a_2^{n})^{m}$ respectivamente.

Ahora puesto que:

$$(a_1^{n})^{m} = a_1^{n \cdot m} \qquad y \qquad (a_2^{n})^{m} = a_2^{n \cdot m}$$

CURSO DE CALCULO INFINITESIMAL

Primera Parte.

Prof. Mario R. Azócar

Santiago

- 1948 -

Para mi amigo y compañero Sergio Celaciate muy cordialmente Pérez.

Santiago 19-VI-49.

Pérez

Todo ejemplar debe lle-
var la firma del autor.

Inscripción
N° 11901.

CAPITULO I.

EL NUMERO REAL.

1.- Introducción.- Los fundamentos sobre los cuales descansa toda la estructura lógica del Cálculo Infinitesimal, y en general del Análisis Matemático, son los números. Los números nos son tan familiares que a primera vista podría parecer razonable aceptarlos como un concepto primitivo (por lo menos los números naturales) es decir como una noción que no requiere definición. El grado de perfeccionamiento que actualmente alcanza la Matemática, no permite tal circunstancia.

Modernamente el número natural puede definirse por un conjunto de axiomas o postulados que lo caracterizan; tal es lo que ha hecho Peano en su Obra " Arithmetica principia nova methodo exposita" (1889) y Hilbert en "Die Grundlegund der elementaren Zohlenlehre" (1930). Puede definirse también por abstracción partiendo de consideraciones sobre conjuntos, éste camino iniciado por Cantor y seguido por Frege, ha sido perfeccionado por Russell y Whitehead en la obra "Principia Mathematica " (1910-1913). Del primero puede leerse, a manera de simple información, la obra "Introducción a la Filosofía Matemática" (Editorial Losada 1945).

Introducidos los números naturales, por uno cualquiera de los procedimientos recién enunciados,se amplia este conjunto en forma sucesiva presentando,por ejemplo, primero los números enteros,después los racionales y finalmente los números reales. Conviene observar a este respecto, con el fin de evitar ideas erróneas, que los nuevos números que van sucesivamente apareciendo (naturales, enteros, racionales y reales) no resultan de agregar otros a los anteriores, sino que ellos tienen una definición propia; de aquí que la palabra número tenga en cada una de sus fases sucesivas, un significado cada vez más amplio y en cada una de ellas será necesario definir de nuevo las operaciones fundamentales. Lo que hay en el fondo es que el conjunto de los números reales tienen un subconjunto isomorfo con el conjunto de los racionales y éste a su vez un subconjunto isomorfo de los enteros y finalmente el conjunto de los enteros positivos es isomorfo con el conjunto de los números naturales.

2.- El número racional.- Los números enteros y fraccionarios positivos y negativos incluyendo el cero forman el llamado conjunto de los números "racionales". Cada elemento de este conjunto es un número racional.

"Nosotros" supondremos conocidas las propiedades más elementales de estos números como así también, que se sabe efectuar con ellos las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética, a saber: adición, sustracción, multiplicación y división, exceptuando por supuesto la división con divisor cero. Quien se interese por un estudio serio y completo de este tema consultar entre otras la excelente obra " Fundamentos del Análisis Matematico" de Landau, o bien en la obra " Questioni riguardanti le matematiche elementari" el articulo titulado: "I numeri reali" de Federico Euriques.

A pesar de lo precedentemente dicho, creyéndolo de interés, mencionaremos aquí algunas de las propiedades más importantes del conjunto de los números racionales. Entre ellas tenemos:

a) El conjunto de los números racionales es ordenado, o sea dados tres números racionales a,b y c, tales que:

$$a < b \qquad y \qquad b < c$$

se sigue:

$$a < c$$

y tomados dos racionales a y b, existe entre ellos una y solamente una de las relaciones:

$$a < b \quad ; \qquad a = b \quad ; \qquad a > b$$

b) El conjunto de los números racionales es denso, o sea que entre dos números racionales cualesquiera a y b existe siempre otro número racional y por consiguiente existen infinitos. En efecto cualquiera que sean dos números racionales que se tomen siempre es posible escribirlos en forma de fracciones de igual denominador; sean ellos entonces:

$$\frac{p}{d} \qquad y \qquad \frac{q}{d}$$

Suponiendo el primero menor que el segundo, o sea $p < q$ se tendrá inmediatamente:

$$\frac{p}{d} < \frac{2p+1}{2d} < \frac{q}{d}$$

c) El conjunto de los números racionales es arquimediano, o sea que el cumple con el Postulado de Arquímedes, esto es que tomados dos números a y b tales que $0 < a < b$, se puede encontrar un entero $n > 0$. tal que: $na > b$. En efecto sea:

$$a = \frac{p}{q}$$

tomemos n de modo que:

$$n > qb$$

entonces

$$na = \frac{np}{q} > \frac{bqp}{q}$$

o sea

$$na > pb$$

y luego

$$na > b$$

De aquí resulta inmediatamente que si $a > 0$ es un número arbitrariamente grande, existe un entero $n > 0$ tal que: $\frac{a}{n} > b$, siendo $b > 0$ arbitrariamente pequeño. En efecto de acuerdo con lo precedente existe un $n > 0$ tal que:

$$nb > a$$

de donde

$$\frac{a}{n} < b.$$

En el campo de los números racionales son siempre posible las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética (exceptuando la división por cero). De aquí que la potenciación de exponente entero y positivo, que es un caso particular de la multiplicación, es siempre posible. Veamos lo que ocurre, por lo menos, con una de sus operaciones inversas.

En la relación $a^n = b$ intervienen tres números: a y b que son racionales y n que es natural. Conocidos b y n, todo número a que elevado a la potencia n-ésima de como resultado b, se llama raíz n-ésima de b. Después de esta definición se comprende que la radicación no es siempre posible en el conjunto de los números racionales ya que si el exponente n es par y b es negativo, no existe ningún número racional positivo ni negativo, cuya potencia n-ésima sea b, pués las potencias de exponente par son siempre positivas. Esta imposibilidad se mantiene, en general, aún considerando solamente radicandos positivos; en efecto si b es un entero no-potencia n-ésima de ningún otro entero, no hay ningún número racional a tal que $a^n = b$, pues a no puede ser entero por hipótesis y si $a = \frac{p}{q}$ siendo p y q primos entre si se tiene que $\frac{p^n}{q^n} = b$ y como p^n y q^n son también primos entre si, llegamos a un absurdo: que una fracción irreductible és igual a un número entero.

La insuficiencia del conjunto de los números racionales para satisfacer siempre la ecuación $x^n = b$ con $b > 0$ nos hace ver la conveniencia de crear un nuevo conjunto de números donde este problema tenga siempre solución. Este nuevo conjunto que definiremos a continuación y que recibe el nombre de conjunto de los números reales contendrá un sub-conjunto isomorfo del conjunto de los racionales y otros elementos llamados números irracionales que son los que nos darán la solución de la ecuación $x^n = b$, con $b > 0$, en aquellos casos en que el sub-conjunto isomorfo de los racionales no sea suficiente.

El número real puede introducirse de diversas maneras, nosotros lo haremos a la manera de Dedekind, partiendo del número racional.

3.- <u>Cortaduras en el campo de los números racionales</u>.-Supongamos que por un procedimiento cualquiera se separa el conjunto de los números racionales en dos clases: una inferior A y otra superior B, tales que todo número a de la primera clase sea menor que todo número b de la segunda clase. Una tal separación la llamaremos cortadura.

Hablando en forma más explícita llamaremos cortadura en el campo de los racionales a una clasificación de ellos en dos clases A y B que satisfagan las condiciones siguientes:

1°. Las clases A y B no son vacías.
2°. Todo número de la clase A es menor que todo número de B.
3°. Todo número racional pertenece a la clase A o a la clase B.

Se cumple, de acuerdo con esta definición de cortadura, que si a es un número de A lo serán también todos lo racionales menores que a y si b es un número de la clase B lo serán también todos los racionales mayores que b. En estas condiciones y a este respecto puede distinguirse tres casos:

a). La clase inferior A contiene un número $\bar{a}$ mayor que todos los números de la misma clase, de modo que todo número racional menor que $\bar{a}$ pertenece a la clase A y todo número mayor que $\bar{a}$ pertenece a la clase B. Este número $\bar{a}$ que separa la clase A de la clase B lo llamaremos frontera de ambas clases.

b) La clase superior B contiene un número $\underline{b}$ menor que todos los otros números de la misma clase. En este caso $\underline{b}$ es la frontera de ambas clases y todo número menor que $\underline{b}$ pertenece a la clase A y todo número mayor que él, pertenece a la clase B.

Haremos ver ahora que es imposible que existan simultáneamente los números: $\bar{a}$ y $\underline{b}$, en efecto si ambos existieran a la vez se tendrá $\bar{a} < \underline{b}$ y por consiguiente el número racional $(\bar{a} + \underline{b})/2$ no estaría en la clase A por ser mayor que $\bar{a}$, ni en la clase B por ser menor que b; de aquí entonces que dicha suposición implica contradicción a la hipótesis de que todo número racional debe estar en una de las dos clases. Luego si hay un número más grande en la clase A no hay uno menor en la clase B y vice-versa.

De ahora en adelante y para simplicidad en el lenguaje de cuestiones posteriores , cuando aparezca una cortadura que tenga en su clase B un número b menor que todos los de su clase lo modificaremos colocando $\bar{b}$ en la clase A, con lo cual dicho número pasará a ser $\bar{a}$ o sea el mayor de todos los de la clase A.

c).Finalmente puede ocurrir que en la clase A no haya un número $\bar{a}$ mayor que cada uno de los números de A ni en B un número b menor que cada uno de los números de B. Nosotros estamos en condiciones de presentar una cortadura semejante; en efecto formemos, por ejemplo, la clase A con todos los números negativos, el cero y todos lo números positivos cuyos cuadrados sean menores que 2; en la clase B coloquemos todos los racionales cuyos cuadrados sean mayores que 2. Se vé inmediatamente que esta clasificación satisface las tres condiciones que contiene la definición de cortadura y que por consiguiente ella es una cortadura. Demostraremos ahora que en A no hay un número más grande que todos los otros, es decir que habiendo dado un número a de A se puede encontrar siempre en A un número mayor que a. Esto es evidente si $a \leqslant 0$, supongamos entonces $a > 0$. Se tendrá que $a^2 = 2 - k$, con $k > 0$, ahora tomando un número positivo $\varepsilon < 1$ y $\varepsilon < \frac{k}{(2a+1)}$, tendremos el número $a+\varepsilon$ que siendo mayor que a pertenece a la clase A, pues:

$$(a+\varepsilon)^2 = a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2 = a^2 + \varepsilon(2a+\varepsilon) < a^2 + \varepsilon(2a+1)$$

$$(a+\varepsilon)^2 < a^2 + k = 2$$

Haremos ver ahora que en esta cortadura tampoco existe en la clase B un número menor que todos los otros de su clase. Pues de $b^2 = 2 + k$ se obtiene el número $b-\varepsilon$ que con $\varepsilon < \frac{k}{2b}$ pertenece a la clase B, pués:

$$(b - \varepsilon)^2 = b^2 - 2b\varepsilon + \varepsilon^2 > b^2 - 2b\varepsilon > b^2 - k = 2$$

4.- El número real.- Llamaremos número real toda cortadura en el campo de los números racionales. En este capítulo, con el propósito de evitar confusiones los números reales los designaremos con letras griegas, o bien, pensando en la noción de cortadura, por el símbolo (A_1,A_2) donde A_1 designa la clase inferior de la cortadura y A_2 la superior. Así pues si α es un número real definido por la cortadura (A_1,A_2), nosotros tendremos:

$$\alpha = (A_1,A_2)$$

de acuerdo con la definición de número real. Los racionales de las clases A_1 y A_2 los designaremos con letras latinas.

En el párrafo precedente hemos visto la existencia de cortaduras de dos clases diferentes: en una existe un número racional $\bar{a}$ mayor que todos los de la clase A, (o un número $\underline{b}$ menor que todos los de la clase B), este tipo de cortadura será para nosotros un número real que llamaremos real racional; en otras no existe $\bar{a}$ ni $\underline{b}$ este tipo de cortadura será para nosotros un número real que llamaremos real irracional. De acuerdo con estas definiciones el conjunto de los números reales está constituido por el conjunto de los reales racionales y por el de los reales irracionales. Teniendo presente ahora que todo número racional $\bar{a}$ define una cortadura real racional si formamos la clase A con todos los números menores que

$\bar{a}$ y el mismo $\bar{a}$ y en la clase B todos los números rra cionales mayores que $\bar{a}$, se comprende que a todo número racional $\bar{a}$ se le puede hacer corresponder el real racional que determina; e inversamente a todo número real racional definido por una cortadura en el campo de los racionales se le puede hacer corresponder el mayor racional de la clase inferior ya que según lo hemos convenido en una cortadura con frontera no existirá b sino $\bar{a}$.

Finalmente como nosotros definiremos las relaciones de orden y las operaciones entre números reales de modo que se mantangan las ya establecidas para los números racionales, podemos decir que el conjunto de los racionales reales es isomorfo con el conjunto de los racionales.

Después de todas las consideraciones hechas en este párrafo se comprende sin dificultad que el conjunto de los números reales es más amplio que el conjunto de los números racionales ya que en el conjunto de los reales además de los reales racionales, que corresponden con los racionales, están los irracionales.

Teorema 1°.- Si α es un número real, definido por la cortadura (A_1,A_2), para todo $e > 0$ arbitrario que se tome, existe un par de números racionales a_1 de A_1 y a_2 de A_2 tales que:

$$a_2 - a_1 < e$$

D.

Basta recordar que el conjunto de los números racionales es arquimediano, es decir que el racional ne (con n entero) puede sobrepasar cualquier racional dado, con tal que n sea suficientemente grande.

Tomemos entonces un número a de A_1 y formemos la progresión:

$$a\ ,\quad a+\frac{e}{2}\ ,\ a+2\frac{e}{2}\ ,\ldots\ldots\ldots\ldots,\ a+p\frac{e}{2},\ldots\ldots$$

Habrá, de acuerdo con lo dicho, un primer racional de esta sucesión, que estará en A_2, sea este $a_2 = a + p\frac{e}{2}$, tomemos entonces $a_1 = a + (p - 1)\frac{e}{2}$, resulta:

$$a_2 - a_1 = \frac{e}{2} \qquad \text{o sea} \qquad a_2 - a_1 < e$$

Si tomamos ahora $a_1 = a + (p - 2)\frac{e}{2}$, se obtiene:

$$a_2 - a_1 = e, \text{ luego es posible aún } \ a_2 - a_1 \leqslant e$$

Definición:

Se dirá que dos conjuntos de números C_1 y C_2 definen un número real $\alpha = (A_1,A_2)$ si todo número del primer conjunto C_1, no es número de la segunda clase A_2 y todo número del segundo conjunto C_2 no es número de la primera clase A_1.

A continuación presentaremos un teorema que será la piedra angular de casi la totalidad de lo que nos resta del número real

Teorema 2°.-

Las condiciones necesarios y suficientes para que dos conjuntos C_1 y C_2 de números racionales definan un número real α , son:

1°.- Que cada clase contenga a lo menos un número

2°.- Que todo número c_1 de C_1 sea menor que todo número c_2 de C_2 y.

3°.- Que para todo $e > 0$, se pueda elegir un racional c_1 de C_1 y un racional c_2 de C_2, tales que:

$$C_2 - C_1 < e$$

D.

Las condiciones son necesarias:-

En efecto sea α un número real definido por la cortadura (A_1, A_2), entonces de acuerdo con la definición misma de cortadura se vé que los conjuntos de números racionales A_1 y A_2 cumplen con las condiciones 1ª y 2ª; por otra parte en virtud del teorema precedente podemos asegurar que dado un $e > 0$ arbitrario existen a_1 de A_1 y a_2 de A_2 tales que:

$$a_2 - a_1 < e$$

lo que muestra que la 3ª condición también se cumple y por consiguiente que las condiciones son necesarias.

Las condiciones son suficientes:-

Dividamos el conjunto de los números racionales en dos clases A_1 y A_2 de acuerdo con el siguiente criterio: en la clase inferior A_1 coloquemos todos los racionales menores que todo c_2 de C_2 y en la clase superior A_2 coloquemos todos los racionales mayor que cualquier c_1 de C_1. Si al clasificar los números racionales en esta forma no quedara ningún racional fuera de la clasificación, indudablemente que ella sería una cortadura (puesto que existirían las dos clases no vacías, todo número de la clase inferior será menor que todo número de la clase superior y además todo racional pertenecería a una y a una sóla de las clases). De ahí entonces que ella definirá un número real α.

Si esto no ocurriera, nosotros demostraremos que de acuerdo con la clasificación hecha, a lo más puede quedar fuera de ella un número racional; en efecto, su pongamos que escaparan a ella dos racionales r_1 y r_2 con $r_1 < r_2$, entonces para todo a_1 y a_2 tendría:

$$a_1 < r_1 < r_2 < a_2$$

de donde:

$$a_2 - a_1 > r_2 - r_1$$

Conclusión que es contraria a la hipótesis, ya que de acuerdo con ella podemos encontrar un $c_1 = a_1$ de A_1 y un $c_2 = a_2$ de A_2 tales que:

$$c_2 - c_1 = a_2 - a_1 < e = r_2 - r_1$$

De aquí entonces que si algún racional queda fuera de la clasificación indicada, él es único y por consiguiente podrá colocarse a gusto en cualquiera de las dos clases A_1 o A_2; de aquí entonces que esta clasificación y por consiguiente las clases C_1 y C_2 definen un número real y solamente uno.

5.- Igualdad y desigualdad de números reales.- Por definición diremos que un número real $\alpha = (A_1, A_2)$ es igual a un número real $\beta = (B_1, B_2)$ y pondremos

$$\alpha = \beta$$

si: cada a_1 es igual a un b_1 y cada a_2 es igual a un b_2. Demás está decir que esta definición es también la definición de igualdad de cortaduras

De la definición de igualdad de números reales se desprende inmediatamente que:

1°. $\alpha = \alpha$

2°. De $\alpha = \beta$ se sigue $\beta = \alpha$

3°. De $\alpha = \beta$ y $\beta = \gamma$ se sigue $\alpha = \gamma$

Por definición diremos que un número real $\alpha = (A_1, A_2)$ es mayor que un número real $\beta = (B_1, B_2)$ y pondremos:

$$\alpha > \beta$$

si existe algún a_1 mayor que algún b_2. Diremos que $\alpha < \beta$ cuando $\beta > \alpha$.

Teorema 3°.-

Las relaciones $\alpha > \beta$ y $\beta > \alpha$ son incompatibles.

D.

Si $\alpha > \beta$ existe $a_1 > b_2$

y

si $\beta > \alpha$ existe $b_1 > a_2$

lo que es imposible porque sería: $a_2 < b_1 < b_2 < a_1$.

Teorema 4°.-

De $\alpha > \beta$ y $\beta > \gamma$ se sigue $\alpha > \gamma$

D.

Por hipótesis se tiene: $a_1 > b_2$ y $b_1 > c_2$ de donde resulta: $a_1 > c_2$ o lo que es lo mismo $\alpha > \gamma$.

Definición:-

Todo número real mayor que el número real cero se dirá positivo y todo número real menor que el número real cero se dirá negativo.

Sabemos que en el conjunto de los números racionales a todo número racional positivo $(+a)$ corresponde uno y solamente un número racional negativo $(-a)$ que podemos llamar su simétrico. Haremos extensible esta propiedad al caso de los números reales.

Sea, entonces, $+\alpha = (A_1, A_2)$ un número real positivo, designemos por $-A_2$ la clase formada por los simétricos de los números de la clase A_2 y por $-A_1$ la clase formada por los simétricos de los números de la clase A_1; mostraremos que las clases $-A_2$ y $-A_1$ forman una cortadura, en efecto, puesto que las clases A_1 y A_2 no son vacías, tampoco lo serán las clases $-A_1$ y $-A_2$, además de acuerdo con la definición misma de las clases $-A_1$ y $-A_2$ se comprende que todo número de la clase $-A_2$ es menor que todo número de la clase $-A_1$ y finalmente puesto que todo racional a tiene un simétrico $-a$ y las clases A_1 y A_2 contienen a todos los racionales igual cosa ocurrirá con las clases $-A_1$ y $-A_2$.

Así pues las clases $-A_2$ y $-A_1$ definen una cortadura y por consiguiente un número real, que por tener todos números de la clase $-A_2$ negativos es menor que cero, este número lo designaremos por:

$$-\alpha = (-A_2, -A_1)$$

y lo llamaremos el número simétrico del número real $+\alpha = (A_1, A_2)$. De lo precedente se desprende que:

$$-(-\alpha) = \alpha$$

Observación:

Si el número $\alpha = (A_1, A_2)$ es positivo la clase A_2 está compuesta solamente de números racionales positivos, mientras que la clase A_1 contiene además de los números racionales positivos no incluidos en A_2 todos los números racionales negativos; designando con A_1' el conjunto de los números positivos de A_1 se comprende, de acuerdo con el teorema 2, que las clases A_1' y A_2 definen también un número real (vale decir una cortadura) y de acuerdo con la definición de igualdad de números reales (cortaduras) se vé que este número definido es el mismo número α.

Esta observación justificará el porqué cuando nosotros clasifiquemos los números racionales positivos en dos clases tales como las clases A_1' y A_2 emplearemos la expresión: " sea $\alpha = (A_1', A_2)$ un número real (positivo) definido en el campo de los racionales positivos " .Análoga justificación tendrá la frase: "sea $\alpha = (A_1, A_2')$ un número real (negativo) definido en el campo de los racionales negativos".

6.- Adición de números reales.- Sean dos números reales $\alpha = (A_1, A_2)$ y $\beta = (B_1, B_2)$. Consideremos la clase de números formada sumando cada número a_1 de A_1 con cada número b_1 de B_1, designemos esta clase con la notación $A_1 + B_1$; análogamente designaremos con $A_2 + B_2$ la clase de los números racionales obtenida sumando cada número a_2 de A_2 con cada número b_2 de B_2.

Aprovechando ahora el Teorema 2, demostraremos que las clases $A_1 + B_1$ y $A_2 + B_2$ definen un número real. En efecto las clases $A_1 + B_1$ y $A_2 + B_2$ no son vacías, además de acuerdo con la definición misma de ellas, todo número de $A_1 + B_1$ es menor que todo número de $A_2 + B_2$ y finalmente, puesto que existen en A_1, A_2, B_1 y B_2 números a_1, a_2, b_1 y b_2 tales que:

$$a_2 - a_1 < \frac{e}{2} \qquad \text{y} \qquad b_2 - b_1 < \frac{e}{2}$$

resulta:

$$(a_2 + b_2) - (a_1 + b_1) < e$$

Así pués las clases $A_1 + B_1$ y $A_2 + B_2$ definen un número real, o dicho de otro modo, ellas con la totalidad de los racionales restantes, si los hubiese, convenientemente ubicados, forman una cortadura $(A_1 + B_1, A_2 + B_2)$.

De acuerdo con estas consideraciones daremos la definición siguiente:

Dados los números reales $\alpha = (A_1,A_2)$ y $\beta = (B_1,B_2)$ llamaremos suma de ellos al número definido por las clases $A_1 + B_1$ y $A_2 + B_2$ y pondremos:

$$\alpha + \beta = \sigma$$

Puesto que las clases $A_1 + B_1$ y $A_2 + B_2$ definen un número real P y solamente uno, queda probada la existencia y unicidad de la suma definida.

La suma de tres números reales: α, β y γ se define como la suma de la suma de los dos primeros con el último. De un modo análogo se define la suma de un número cualquiera ,finitos, de sumandos.

Teorema 5°.-

La suma de números reales es conmutativa, es decir:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

D.

Para la demostración de este teorema basta tener presente que dados dos números racionales a y b se tiene que : a + b = b + a. Esto implica la identidad de las clases $A_1 + B_1$ y $B_1 + A_1$ como así también la de las clases $A_2 + B_2$ y $B_2 + A_2$, de aquí entonces que las clases $A_1 + B_1$, $A_2 + B_2$ y $B_1 + A_1$,$B_2 + A_2$ definan el mismo número real y por consiguiente: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Teorema 6°.-

La suma de números reales es asociativa,es decir:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

D.

En este caso basta tener presente que dados tres números racionales a.b, y c se tiene que: $(a + b) + c = a + (b + c)$, igualdad que implica la identidad de las clases $(A_1 + B_1) + C_1$ con $A_1 + (B_1 + C_1)$ y $(A_2 + B_2) + C_2$ con $A_2 + (B_2 + C_2)$ y por consiguiente la igualdad de los números que ellas definen, o sea: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

Teorema 7°.-

Todo número real α sumado con el número real 0 da como suma α, o sea:

$$\alpha + 0 = \alpha$$

D.

Sea el número $\alpha = (A_1, A_2)$ y el número $0 = (N, P)$, donde N designa el conjunto de los racionales negativos y el cero y P el conjunto de los racionales positivos. De acuerdo con la definición que hemos dado de suma, se tiene: $\alpha + 0 = (A_1 + N, A_2 + P)$ y se comprende sin dificultad que todo número de $A_1 + N$ está en A_1 y que todo número de $A_2 + P$ está en A_2 lo que de acuerdo con la definición de igualdad de números reales implica: $\alpha + 0 = \alpha$.

Teorema 8°.-

Todo número real sumado con su simétrico da suma cero, es decir:

$$\alpha + (-\alpha) = 0$$

D.-

Sea el número $\alpha = (A_1, A_2)$, su simétrico es entonces $-\alpha = (-A_2, -A_1)$ y por consiguiente el número $\alpha + (-\alpha)$ queda definido por las clases $A_1 + (-A_2)$ y $A_2 + (-A_1)$; pero teniendo presente que todo $a_2 > a_1$, resulta que los números de la primera clase son todos negativos y los de la segunda todos positivos, lo que indica que dichas clases definen el número real cero, luego: $\alpha + (-\alpha) = 0$.

7.- Multiplicación de números reales.- Sean $\alpha = (A_1, A_2)$ y $\beta = (B_1, B_2)$ dos números reales positivos definidos en el campo de los racionales positivos. Consideremos la clase de números formada por todos los productos del tipo $a_1 \cdot b_1$, llamémosla A_1B_1; análogamente llamemos A_2B_2 la clase de números racionales del tipo a_2b_2. Probaremos ahora que dichas clases A_1B_1 y A_2B_2 gozan de las propiedades necesarias y suficientes para definir un número real y solamente uno.

En efecto, las clases no son vacías y de acuerdo con su definición todo número de A_1B_1 es menor que todo número de A_2B_2. Finalmente se tiene que:

$$a_2b_2 - a_1b_1 = a_2(b_2 - b_1) + b_1(a_2 - a_1)$$

y tomando un número h racional (real) mayor que los números α y β resulta que todo b_1 es inferior a h; pero por otra parte siendo h superior a α existe un conjunto de a_2 inferior a h, luego:

$$a_2b_2 - a_1b_1 < h(b_2 - b_1) + h(a_2 - a_1)$$

Ahora por hipótesis se pueden determinar a_1, a_2, b_1 y b_2 tales que:

$$b_2 - b_1 < \frac{e}{2h} \qquad \text{y} \qquad a_2 - a_1 < \frac{e}{2h}$$

luego:

$$a_2b_2 - a_1b_1 < e$$

De este modo, de acuerdo con lo precedente daremos la siguiente definición:

Dados dos números reales positivos $\alpha = (A_1, A_2)$ y $\beta = (B_1, B_2)$ definidos en el campo de los racionales positivos, llamaremos producto de ellos al número π definido por las clases A_1B_1, A_2B_2 y pondremos:

$$\alpha \cdot \beta = \pi$$

Puesto que las clases A_1B_1 y A_2B_2 definen un número real π y solamente uno, queda probada la existencia y unicidad de la multiplicación definida.

El producto de tres números reales: α, β y γ se define como el producto del producto de los dos primeros por el tercero. De un modo análogo se define el producto de un número cualquierà, finito, de números.

Teorema 9°.-

La multiplicación de números reales es conmutativa, es decir:

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

D.

Si a y b son dos números racionales se tiene que $a \cdot b = b \cdot a$; de aquí entonces que las dclases A_1B_1 y B_1A_1 como así también las clases A_2B_2 y B_2A_2 sean iguales entre sí, luego son iguales también las cortaduras (A_1B_1, A_2B_2) y (B_1A_1, B_2A_2), es decir $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

Teorema 10°.-

La multiplicación de números reales es asociativa, es decir:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

D.

Basta tener presente que dados tres números a, b y c, se tiene que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, lo que implica la identidad de las clases $(A_1 \cdot B_1) \cdot C_1$ y $A_1 \cdot (B_1 \cdot C_1)$ como así también la de $(A_2 \cdot B_2) \cdot C_2$ y $A_2 \cdot (B_2 \cdot C_2)$ y por ende la igualdad de las cortaduras: $(\overline{A_1 \cdot B_1} \cdot C_1, \overline{A_2 \cdot B_2} \cdot C_2)$ y $(\overline{A_1 \cdot B_1} \cdot C_1, \overline{A_2 \cdot B_2} \cdot C_2)$ o sea: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

Teorema 11°.-

La multiplicación de números reales es distributiva, o sea:

$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$$

D.

Habiendo dado tres números racionales a,b y c, se sabe que: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, esta igualdad implica la igualdad de las clases $\overline{A_1 + B_1} \cdot C_1$ y $A_1 C_1 + B_1 C_1$ como así también la de $\overline{A_2 + B_2} \cdot C_2$ y $A_2 C_2 + B_2 C_2$ y como estas últimas implican la igualdad de las cortaduras $(\overline{A_1 + B_1} \cdot C_1, \overline{A_2 + B_2} \cdot C_2)$ y $(A_1 C_1 + B_1 C_1, A_2 C_2 + B_2 C_2)$, se tiene: $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$.

Teorema 12°.-

Todo número real α multiplicado por el número real 1, da como producto α, o sea:

$$\alpha \cdot 1 = \alpha$$

D.

Consideremos el número positivo $\alpha = (A_1, A_2)$ definido en el campo de los racionales positivos, y el número $1 = (B_1, B_2)$, siendo B_1 el conjunto de todos los racionales positivos menores que uno y el racional uno y B_2 el conjunto de todos los racionales mayores que uno.

De acuerdo con esto y con la definición de producto de números reales se tiene que el número $\alpha \cdot 1$ está definido por las clases A_1B_1 y A_2B_2. Ahora puesto que todos los números del conjunto B_1 son positivos y menores e igual al número uno, los números que forman el conjunto A_1B_1 son iguales a los que forman A_1; otro tanto ocurre con los números de las clases A_2B_2 y A_2, de allí que podamos afirmar que $(A_1B_1, A_2B_2) = (A_1, B_1)$ o sea que: $\alpha \cdot 1 = \alpha$.

Terminaremos lo referente a la multiplicación de números reales dando algunas definiciones que nos aseguren la generalidad de los teoremas precedentes.

Definiciones:-

Si α es un número real negativo y β un número real positivo, llamaremos producto de α por β, representándolo por $\alpha\beta$, al número simétrico del producto del simétrico de α por β; así:

$$\alpha \cdot \beta = -\left[(-\alpha) \cdot \beta\right]$$

Análogamente, si α es positivo y β negativo:

$$\alpha \cdot \beta = -\left[\alpha \cdot (-\beta)\right],$$

si α y β son negativos, entonces:

$$\alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot (-\beta),$$

y finalmente:

$$\alpha \cdot 0 = 0$$

para todo número real.

8.- <u>Sustracción de números reales</u>:- Dados dos números reales α y β definiremos la sustracción del número β al número α, como la operación por la cual se determina el número que es necesario sumar a β para obtener α. Se dice por esto que la sustracción es la operación inversa de la adición.

El número que es necesario sumar a β para tener α, lo designaremos por δ y lo llamaremos diferencia entre α y β. De acuerdo con la definición de adición este número existe y es único y el puede determinarse de la relación:

$$\beta + \delta = \alpha$$

en efecto, agregando el simétrico de β a ambos miembros de esta igualdad se obtiene:

$$\beta + (-\beta) + \delta = \alpha + (-\beta)$$

o sea

$$\delta = \alpha + (-\beta)$$

lo que nos indica que la diferencia δ entre α y β se obtiene sumando a α el simétrico de β. Vemos pués que la sustracción se ha reducido a la suma lo que confirma que ella siempre tiene solución y una solamente.

El número δ lo designaremos en adelante por $\alpha - \beta$, así se tiene:

$$\alpha + (-\beta) = \alpha - \beta$$

de donde:

$$(\alpha - \beta) + \beta = \alpha$$

ya que:

$$(\alpha - \beta) + \beta = \left[\alpha + (-\beta)\right] + \beta = \alpha + \left[(-\beta) + \beta\right] = \alpha + 0 = \alpha$$

A continuación definiremos un nuevo concepto y presentaremos un teorema que será de mucha utilidad en numerosos razonamientos posteriores:

Definición:-

Si α es un número real llamamos valor absoluto de α a un número que representaremos por $|\alpha|$ y tal que

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{cuando } \alpha > 0 \\ 0 & \text{cuando } \alpha = 0 \\ -\alpha & \text{cuando } \alpha < 0 \end{cases}$$

Teorema 13°.-

El valor absoluto de una suma de números es menor o a la sumo igual a la suma de los valores absolutos de dichos números, o sea

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$$

D.-

De la definición dada para la suma de números reales, resulta que el valor absoluto de $\alpha + \beta$ es la suma de los valores absolutos de α y β cuando ambos números son positivos o negativos. Pero si ellos son uno positivo y el otro negativo, suponiendo $|\alpha| > |\beta|$ el valor absolutò de la suma $\alpha + \beta$ es $|\alpha| - |\beta|$ número menor que $|\alpha| + |\beta|$ por ser $-|\beta| < |\beta|$; de aquí entonces qùe resumiendo ambos casos se tiene: $|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$

Aplicando esta desigualdad reiteradamente se puede demostrar el teorema para un número cualquiera finito de sumandos. Así para α, β y γ se tiene:

$$|\alpha + \beta + \gamma| \leqslant |\alpha + \beta| + |\gamma| \leqslant |\alpha| + |\beta| + |\gamma|$$

9.- División de números reales.- Se sabe que a todo número racional a, diferente de cero, corresponde otro número racional que llamamos su recíproco y que se designa con $\frac{1}{a}$.

Antes de proceder a definir el cuociente de dos números reales, definiremos lo que se entiende por recíproco de un número real α . Consideremos con este fin un número positivo $\alpha = (A_1, A_2)$ definido en el campo de los racionales positivos.

Designemos con $\frac{1}{A_2}$ la clase formada con los recíprocos de los números de A_2 y por $\frac{1}{A_1}$ la clase formada por los recíprocos de los números de A_1. Probaremos que estas clases definen un número real; en efecto, además de no ser vacías, todo número de $\frac{1}{A_2}$ es menor que todo número de $\frac{1}{A_1}$ y se puede elegir a_1 y a_2 de tal modo que:

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} < e$$

para demostrar esta última afirmación sea h un número real racional comprendido entre cero y α ; los a_2 son todos mayores que h y por otra parte existe un conjunto de números a_1 mayores que h, de aquí entonces que para estos se tenga:

$$h^2 < a_1 a_2 \, ,$$

como además existen a_1 y a_2 tales que:

$$a_2 - a_1 < h^2 e$$

resulta

$$a_2 - a_1 < a_1 a_2 e$$

y luego

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} < e$$

Así, pues, las clases $\frac{1}{A_2}$ y $\frac{1}{A_1}$ definen un número real, este número lo llamaremos recíproco de α y lo designaremos por $\frac{1}{\alpha}$.

Finalmente dado un número negativo $(-\alpha)$ llamaremos número recíproco de él, el número simétrico del recíproco del simétrico de $(-\alpha)$. Si designamos con $\frac{1}{-\alpha}$ este número se tendrá:

$$\frac{1}{-\alpha} = -\frac{1}{-(-\alpha)}$$

y como ya hemos visto que $-(-\alpha) = \alpha$, se tendrá:

$$\frac{1}{-\alpha} = -\frac{1}{\alpha}$$

Teorema 14°.-

Todo número real multiplicado por su recíproco da como producto uno, o sea:

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$$

D.-

Sea $\alpha = (A_1, A_2)$ un número real definido en el campo de los racionales positivos. El número $\frac{1}{\alpha}$ estará definido entonces por la cortadura $\left(\frac{1}{A_2}, \frac{1}{A_1}\right)$ y el número que resulta de multiplicar α por $\frac{1}{\alpha}$ queda, de acuerdo con la definición de multiplicación, definido por las clases $A_1 \cdot \frac{1}{A_2}$ y $A_2 \cdot \frac{1}{A_1}$, ahora puesto que todo $a_2 > a_1$ resulta que todos los números de la primera clase son menores que uno y todos los de la segunda clase mayores que uno, de aquí que ellas definen el número uno, o sea $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$

Veamos ahora la definición de cuociente de dos números reales. Dados dos números reales α y β definiremos la división del número α por el número β como la operación por la cual se determina el número que multiplicado por β de como producto el número α .Se dice por esto que la división es la operación inversa de la multiplicación.

El número por el cual es necesario multiplicar β para tener α lo llamaremos cuociente entre α y β y lo designaremos por ζ . De acuerdo con su definición se tiene:

$$\beta \cdot \zeta = \alpha$$

si β no es nulo, existe el recíproco de β y multiplicando los dos miembros de la igualdad precedente por dicho recíproco resulta:

$$\beta \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \zeta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$$

o sea

$$\zeta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$$

de aquí que el cuociente entre α y β es igual al producto de α por el número recíproco del número β y así la división se ha reducido a la multiplicación, de aquí que la división tenga siempre una y sola una solución, con tal que el divisor sea diferente de cero.

El número ζ lo designaremos en adelante por $\frac{\alpha}{\beta}$, de modo que:

$$\alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

de donde

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta = \alpha$$

ya que

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta = (\alpha\cdot\frac{1}{\beta})\cdot\beta = \alpha\cdot(\frac{1}{\beta}\cdot\beta) = \alpha\cdot 1 = \alpha$$

10.- Potencia de un número real.- Sea $\alpha = (A_1, A_2)$ un número real definido en el campo de los racionales positivos y sea n un número entero y positivo. Designemos con A_1^n la clase formada por las potencias n-ésimas de todos los números a_1 de A_1 y llamemos A_2^n la clase formada por las potencias n-ésimas de todos los a_2 de A_2.

Demostraremos que las clases A_1^n y A_2^n así formados, definen un número real. Desde luego tenemos que ambas clases no son vacías y además que todo número de A_1^n es menor que todo número de A_2^n ya que siendo a_1 y a_2 racionales, de $a_1 < a_2$ se sigue $a_1^n < a_2^n$. Sólo resta demostrar entonces que tomado un $e > 0$ existen a_1^n y a_2^n tales que:

$$a_2^n - a_1^n < e$$

Para establecer esto consideremos la identidad:

$$(a_2^n - a_1^n) = (a_2 - a_1)(a_1^{n-1} + a_2 a_1^{n-2} + \dots + a_2^{n-2} a_1 + a_2^{n-1})$$

tomamos:

$$a_2 - a_1 < \frac{e}{nh^{n-1}}$$

siendo h un racional mayor que el a_2 considerado, entonces:

$$a_2^n - a_1^n < e$$

De aquí entonces que las clases A_1^n y A_2^n definan un número real y de acuerdo con esto daremos la siguiente definición:

Dado un número real $\alpha = (A_1, A_2)$ definido en el campo de los racionales positivos y un entero positivo n, llamaremos potencia n-ésima de α al número real definido por las clases A_1^n y A_2^n. Este número lo designaremos por el símbolo α^n y pondremos:

$$(\alpha)^n = \alpha^n$$

Teorema 15°.-

$$\alpha^n \cdot \alpha^m = \alpha^{n+m}$$

D.-

Sea $\alpha = (A_1, A_2)$ un número real, definido en el campo de los racionales positivos, los números α^n y α^m están definidos entonces por las clases A_1^n, A_2^n y A_1^m, A_2^m respectivamente.

Ahora de acuerdo con la definición de producto de números reales, el número $\alpha^n \cdot \alpha^m$ estará definido por las clases $A_1^n \cdot A_1^m$, $A_2^n \cdot A_2^m$ donde la primera clase está formada por los números del tipo $a_1^n \cdot a_1^m$ y la segunda por números del tipo $a_2^n \cdot a_2^m$, y puesto que:

$$a_1^n \cdot a_1^m = a_1^{n+m} \quad \text{y} \quad a_2^n \cdot a_2^m = a_2^{n+m}$$

dichas clases son idénticas con las clases A_1^{n+m} y A_2^{n+m} que son las que definen el número α^{n+m}, de aquí entonces que: $\alpha^n \cdot \alpha^m = \alpha^{n+m}$

Teorema 16°.-

$$\alpha^n \cdot \beta^n = (\alpha \cdot \beta)^n$$

D.-

Sean $\alpha = (A_1, A_2)$ y $\beta = (B_1, B_2)$ dos número reales definidos en el campo de los racionales positivos. De acuerdo con esto se comprende que los números α^n; β^n y $\alpha^n \cdot \beta^n$ estarán definidos por las clases A_1^n, A_2^n, B_1^n, B_2^n y $A_1^n \cdot B_1^n$, $A_2^n \cdot B_2^n$ respectivamente.

Ahora teniendo en cuenta que:

$$a_1^n \cdot b_1^n = (a_1 \cdot b_1)^n \qquad y \qquad a_2^n \cdot b_2^n = (a_2 \cdot b_2)^n$$

se vé que las clases $A_1^n \cdot B_1^n$, $A_2^n \cdot B_2^n$ son idénticas a las clases $\overline{A_1 \cdot A_2}^n$, $\overline{B_1 \cdot B_2}^n$ que definen el número $(\alpha \cdot \beta)^n$, de ahí entonces que: $\alpha^n \cdot \beta^n = (\alpha \cdot \beta)^n$.

Teorema 17°.- $(\alpha^n)^m = \alpha^{n \cdot m}$

D.-

Sea $\alpha = (A_1, A_2)$ un número real definido en el campo de los racionales positivos, entonces el número α^n está definido por las clases A_1^n, A_2^n y por consiguiente $(\alpha^n)^m$ por las clases $(A_1^n)^m$, $(A_2^n)^m$ cuyos elementos son números de la forma: $(a_1^n)^m$ y $(a_2^n)^m$ respectivamente.

Ahora puesto que:

$$(a_1^n)^m = a_1^{n \cdot m} \qquad y \qquad (a_2^n)^m = a_2^{n \cdot m}$$

resulta que las clases $(A_1^n)^m$, $(A_2^n)^m$ son idénticas con las clases $A_1^{n\cdot m}$, $A_2^{n\cdot m}$, y como estas definen el número $\alpha^{n\cdot m}$ se tiene finalmente: $(\alpha^n)^m = \alpha^{n\cdot m}$

Para que los teoremas precedentes sean válidos cuando n y m sean cero o números enteros negativos daremos la siguiente definición:

$$\alpha^\circ = 1 \qquad y \qquad \alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} .$$

donde $\frac{1}{\alpha^n}$ designa el número recíproco del número α^n.

Teorema 18°.-

$$\frac{1}{\alpha^n} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n$$

D.-

Sea el número real $\alpha = (A_1, A_2)$ definido en el campo de los racionales positivos. Su número recíproco $\frac{1}{\alpha}$ queda definido entonces por las clases $\frac{1}{A_2}$ y $\frac{1}{A_1}$ y su potencia n-ésima α^n por las clases A_1^n , A_2^n .

Ahora por otra parte, la potencia n-ésima del número $\frac{1}{\alpha}$, es decir el número $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n$ estará definido por las clases $\left(\frac{1}{A_2}\right)^n$, $\left(\frac{1}{A_1}\right)^n$ y el número recíproco del número α^n , es decir $\frac{1}{\alpha^n}$ está definido por las clases $\frac{1}{A_2^n}$, $\frac{1}{A_1^n}$; pero puesto que:

$$\left(\frac{1}{a_2}\right)^n = \frac{1}{a_2^n} \qquad y \qquad \left(\frac{1}{a_1}\right)^n = \frac{1}{a_1^n}$$

resulta que las clases $\left(\frac{1}{A_2}\right)^n$, $\left(\frac{1}{A_1}\right)^n$ son respectivamente idénticas con las clases $\frac{1}{A_2^n}$ y $\frac{1}{A_1^n}$ lo que en el fondo equivale a afirmar la veracidad del teorema.

Teorema 19°.-

Si α y β son dos números reales positivos y n un entero positivo, se tiene la igualdad:

$$\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \cdots\cdots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1})$$

D.-

$$\Sigma = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \cdots\cdots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}$$

entonces:

$$\alpha\Sigma = \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \cdots\cdots + \alpha^2\beta^{n-2} + \alpha\beta^{n-1}$$

y

$$\beta\Sigma = \alpha^{n-1}\beta + \alpha^{n-2}\beta^2 + \cdots\cdots + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n$$

de donde:

$$(\alpha - \beta)\,\Sigma = \alpha^n - \beta^n$$

o sea

$$\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1})$$

Teorema 20°.-

Si α es un número real positivo, n un entero positivo y β y γ dos reales racionales positivos tales que $\beta^n < \alpha < \gamma^n$, entonces existen dos reales racionales β_1, y γ_1, tales que:

$$\beta^n < \beta_1^n < \alpha < \gamma_1^n < \gamma^n$$

D.-

Puesto que el conjunto de los racionales es denso, si b y c son los racionales correspondientes a los reales β y γ, existe un racional b_1 tal que $b < b_1 < c$ y por consiguiente existe β_1 tal que $\beta < \beta_1 < \gamma$ y luego de:

$$\beta_1^n - \beta^n = (\beta_1 - \beta)(\beta_1^{n-1} + \beta_1^{n-2} + \cdots + \beta_1\beta^{n-2} + \beta^{n-1})$$

resulta

$$\beta_1^n - \beta^n < (\beta_1 - \beta)n\,\gamma^{n-1}$$

y como podemos elegir $b_1 > b$ tal que $\beta_1 - \beta < \frac{\alpha - \beta^n}{n\gamma^{n-1}}$

queda:

$$\beta_1^n - \beta^n < \alpha - \beta^n$$

o sea

$$\beta_1^n < \alpha$$

y como

$$\beta < \beta_1$$

se tiene:

$$\beta^n < \beta_1^n < \alpha$$

De una manera análoga se demuestra la existencia de un γ_1 tal que:

$$\gamma^n > \gamma_1^n > \alpha$$

Teorema 21°.-

Si α es un número real positivo, n un entero positivo y β y γ dos reales racionales positivos tales que $\beta^n < \alpha < \gamma^n$, entonces tomado un número real arbitrario $\varepsilon > 0$ existen dos números reales racionales β_1 y γ_1 tales que:

$$\gamma_1^n - \beta_1^n < \varepsilon \text{ siempre que } \gamma_1 - \beta_1 < \frac{\varepsilon}{n\gamma^{n-1}}$$

D.-

El teorema precedente nos asegura la existencia de β_1 y γ_1 tales que:

$$\beta^n < \beta_1^n < \alpha < \gamma_1^n < \gamma^n$$

y como

$$(\gamma_1^n - \beta_1^n) = (\gamma_1 - \beta_1)(\gamma_1^{n-1} + \gamma_1^{n-2}\beta + \dots + \gamma_1\beta_1^{n-2} + \beta_1^{n-1})$$

se tiene

$$\gamma_1^n - \beta_1^n < (\gamma_1 - \beta_1)n\gamma^{n-1}$$

y para

$$\gamma_1 - \beta_1 < \frac{\varepsilon}{n\gamma^{n-1}}$$

resulta

$$\gamma_1^n - \beta_1^n < \varepsilon$$

Observación:.

Dado un número real positivo α y un entero n, sabemos que siempre existe un número α^n y sólo uno, que es potencia n-ésima de α. Cabe preguntar ahora si dado un número real positivo α existe un número ξ tal que su n-ésima potencia sea igual a α, o sea ¿existe un número real ξ tal que $\xi^n = \alpha$?. La respuesta será afirmativa de acuerdo con el siguiente teorema.

Teorema 22°.-

Si α es un número real positivo existe un número real positivo ξ y solamente uno cuya potencia n-ésima es el número α, o sea:

$$\xi^n = \alpha$$

D.-

Comenzaremos haciendo ver que si el número ξ existe él es único. En efecto si existen dos números diferentes ξ_1 y ξ_2, suponiendo $\xi_1 \quad \xi_2$, se demuestra sin dificultad que $\xi_1^n < \xi_2^n$ o sea que $\alpha < \alpha$, lo que es absurdo. Queda entonces solamente por demostrar que tal número existe.

Consideremos el conjunto de los números racionales positivos, si α es un número real racional corresponde a él en dicho conjunto un cierto racional a y si para este racional a existe en el campo de los racionales un número x tal que $x^n = a$, entonces el número real correspondiente al racional x será el número buscado. Supongamos entonces que tal número x no existe.

Dividamos el conjunto de los números racionales positivos en dos clases R y S de acuerdo con el criterio siguiente: la clase inferior R contendrá todos los números racionales positivos r, tales que siendo ρ su correspondiente número real se tenga $\rho^n < \alpha$. La clase S estará formada por todos los racionales s tales que siendo σ su real correspondiente se tenga $\sigma^n > \alpha$

De acuerdo con este criterio no queda ningún racional positivo fuera de la clasificación, pues no existe un racional x tal que, si ξ es su real correspondiente, se tenga $\xi^n = \alpha$; además todo r es menor que todo s ya que de $\rho^n < \alpha < \sigma^n$ se sigue $\rho < \sigma$ y finalmente de acuerdo con el teorema 19° no hay un ρ mayor que todos los ρ ni un σ menor que todos los σ. De aquí entonces que esta clasificación define un número real positivo $\xi = (R,S)$ tal que $\rho < \xi < \sigma$

De estas desigualdades resulta:

$$\rho^n < \xi^n < \sigma^n \qquad (a)$$

para todos los reales racionales ρ y σ; así como

$$\rho^n < \alpha < \sigma^n \qquad (b)$$

Ahora por otra parte todo racional positivo tiene un correspondiente ρ o σ y solamente uno, por consiguiente se podrán elegir ρ y σ tales que $\sigma - \rho$ sea menor que cualquier cantidad positiva, de aquí entonces que de acuerdo con el teorema 20° se tenga:

$$\sigma^n - \rho^n < \varepsilon \qquad (c)$$

siendo $\varepsilon > 0$ un número real arbitrario, desigualdad que junto con las (a) y (b) nos permite afirmar que:

$$\xi^n = \alpha$$

Este número ξ cuya existencia y unicidad ha sido demostrada lo llamaremos la raíz aritmética n-ésima del número α y lo representaremos por:

$$\xi = \sqrt[n]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{n}}$$

de modo que:

$$\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n = \left(\alpha^{\frac{1}{n}}\right)^n = \xi^n = \alpha$$

Definiremos además el símbolo $\alpha^{\frac{m}{n}}$ como el número que representa a ξ^m, de modo que:

$$\alpha^{\frac{m}{n}} = \left(\alpha^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^m$$

y finalmente

$$\alpha^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{m}{n}}}$$

Teorema 23°.-

Si α es un número real positivo y m y n enteros positivos se tiene:

$$\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^m = \sqrt[n]{\alpha^m}$$

D.-

Sea

$$\rho = \sqrt[n]{\alpha}, \text{ entonces } \rho^n = \alpha \text{ y } \rho^m = \left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^m$$

además

$$\alpha^m = (\rho^n)^m = \rho^{n\cdot m} = \rho^{m\cdot n} = (\rho^m)^n$$

luego

$$\rho^m = \sqrt[n]{\alpha^m}$$

o sea

$$\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^m = \sqrt[n]{\alpha^m}$$

Teorema 24°.-

Si α es un número real positivo, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ reales racionales, se tiene:

$$\alpha^{\frac{a}{b}} \cdot \alpha^{\frac{c}{d}} = \alpha^{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}$$

D.-

Se tiene:

$$\alpha^{\frac{a}{b}} = \alpha^{\frac{ad}{bd}} = \left(\alpha^{\frac{1}{bd}}\right)^{ad}$$

y

$$\alpha^{\frac{c}{d}} = \alpha^{\frac{cb}{db}} = \left(\alpha^{\frac{1}{bd}}\right)^{cb}$$

luego

$$\alpha^{\frac{a}{b}} \cdot \alpha^{\frac{c}{d}} = \left(\alpha^{\frac{1}{bd}}\right)^{ad+cb} = \alpha^{\frac{ad+cb}{bd}} = \alpha^{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}$$

Teorema 25°.-

Si α y β son números positivos y $\frac{a}{b}$ un real racional, entonces:

$$\alpha^{\frac{a}{b}} \cdot \beta^{\frac{a}{b}} = (\alpha \cdot \beta)^{\frac{a}{b}}$$

D.-

Se tiene

$$\alpha^{\frac{a}{b}} = \left(\alpha^{\frac{1}{b}}\right)^a \quad \text{y} \quad \beta^{\frac{a}{b}} = \left(\beta^{\frac{1}{b}}\right)^a$$

luego

$$\alpha^{\frac{a}{b}} \cdot \beta^{\frac{a}{b}} = \left(\alpha^{\frac{1}{b}}\right)^a \cdot \left(\beta^{\frac{1}{b}}\right)^a = \left(\alpha^{\frac{1}{b}} \cdot \beta^{\frac{1}{b}}\right)^a$$

ahora por otra parte se tiene que:

$$\left(\alpha^{\frac{1}{b}} \cdot \beta^{\frac{1}{b}}\right)^b = \left(\alpha^{\frac{1}{b}}\right)^b \cdot \left(\beta^{\frac{1}{b}}\right)^b = \alpha \cdot \beta$$

de donde

$$\alpha^{\frac{1}{b}} \cdot \beta^{\frac{1}{b}} = (\alpha \cdot \beta)^{\frac{1}{b}}$$

y luego

$$\alpha^{\frac{a}{b}} \cdot \beta^{\frac{a}{b}} = \left[(\alpha \cdot \beta)^{\frac{1}{b}}\right]^a = (\alpha \cdot \beta)^{\frac{a}{b}}$$

Teorema 26°.-

Si α es un número real positivo y $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ números reales racionales, se tiene:

$$\left(\alpha^{\frac{a}{b}}\right)^{\frac{c}{d}} = \alpha^{\frac{ac}{bd}}$$

D.-

Comenzaremos con un caso simple, suponiendo que uno de los reales racionales sea entero, pongamos entonces $\frac{c}{d} = p$, se tendrá:

$$\left(\alpha^{\frac{a}{b}}\right)^{p} = \left[\left(\alpha^{\frac{1}{b}}\right)^{a}\right]^{p} = \left(\alpha^{\frac{1}{b}}\right)^{ap} = \alpha^{\frac{ap}{b}} = \alpha^{\frac{a}{b}\cdot p}$$

Establecido esto, consideremos ahora el caso general. Sea entonces:

$$\left(\alpha^{\frac{a}{b}}\right)^{\frac{c}{d}} = \beta$$

de acuerdo con lo ya demostrado se tendrá:

$$\beta^{d} = \left[\left(\alpha^{\frac{a}{b}}\right)^{\frac{c}{d}}\right]^{d} = \left(\alpha^{\frac{a}{b}}\right)^{c} = \alpha^{\frac{ac}{b}}$$

ahora

$$\left(\alpha^{\frac{ac}{bd}}\right)^{d} = \alpha^{\frac{ac}{b}}$$

de donde

$$\beta^{d} = \left(\alpha^{\frac{ac}{bd}}\right)^{d}$$

y de acuerdo con la unicidad de la raíz aritmética:

$$\beta = \alpha^{\frac{ac}{bd}}$$

o sea

$$\left(\alpha^{\frac{a}{b}}\right)^{\frac{c}{d}} = \alpha^{\frac{ac}{bd}}$$

Observación:

Después de todo lo precedente, para concluir con nuestro tema, sólo nos queda que preocuparnos de las potencias de base real negativa y exponente real racional y de las potencias de base real positiva con exponente real. El primer asunto lo despacharemos inmediatamente con la definición:

Si $\frac{a}{b}$ es un número racional irreductible, entonces:

$$(-\alpha)^{\frac{a}{b}} = \alpha^{\frac{a}{b}} \qquad \text{cuando} \quad a = 2n$$

$$(-\alpha)^{\frac{a}{b}} = -\left(\alpha^{\frac{a}{b}}\right) \qquad \text{cuando } a = 2n + 1 \quad y \quad b = 2m+1$$

$(-\alpha)^{\frac{a}{b}}$ no lo definiremos cuando $a=2n+1$ y $b=2m$

Se sabe que la definición de este último caso implica la creación de los números complejos.

Pasemos ahora a preocuparnos de la potencia de base real positiva con exponente real. En el razonamiento que con este fin haremos a continuación, intervendrán relaciones con letras latinas y griegas, demás está decir que tal cosa se hará sólo con el deseo de evitar una superflua notación nueva. Se deberá entender en tales casos que todas las letras griegas y latinas representan números reales y las latinas particularmente representan números reales racionales.

Sean $\alpha = (A_1,A_2)$ y $\beta = (B_1,B_2)$ dos números reales definidos en el campo de los racionales positivos, siendo $\alpha > 1$.

Indicando con $A_1^{B_1}$ el conjunto de las potencias de los números a_1 de A_1 que tienen como exponente los números b_1 de B_1 y dando un análogo significado al símbolo $A_2^{B_2}$, demostraremos que estas dos clases de números $A_1^{B_1}$ y $A_2^{B_2}$ definen un número real.

Desde luego ya que A_1, A_2, B_1 y B_2 no son vacías tampoco lo serán las clases $A_1^{B_1}$ y $A_2^{B_2}$. Siendo además $\alpha > 1$ se tiene para los números de A_2 que $a_2 > 1$ y como todo b_1 es positivo resulta $a_1^{b_1} < a_2^{b_1} < a_2^{b_2}$. Sólo resta demostrar entonces que cualquiera que sea el número racional $e > 0$ que se tome existen a_1, a_2, b_1 y b_2 tales que:

$$a_2^{b_2} - a_1^{b_1} < e$$

Para demostrar esto observemos que:

$$a_2^{b_2} - a_1^{b_1} = (a_1^{b_2} - a_1^{b_1}) + (a_2^{b_2} - a_1^{b_2})$$

Tomemos un número racional h tal que siendo η su real correspondiente se tenga $\eta > \beta$. Entonces

$$a_1^{b_2} - a_1^{b_1} = a_1^{b_1}(a_1^{b_2-b_1} - 1)$$

y puesto que se pueden elegir b_1 y b_2 tales que $b_2 - b_1 < \frac{1}{n}$, resulta:

$$a_1^{b_2} - a_1^{b_1} < a_1^{b_1}(a_1^{\frac{1}{n}} - 1) \qquad \text{con } a_1 > 1$$

y aún

$$a_1^{b_2} - a_1^{b_1} < a_1^h (a_1^{\frac{1}{n}} - 1)$$

y como se puede tomar n de modo que

$$a_1^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{e}{2a_1^h}$$

resulta:

$$a_1^{b_2} - a_1^{b_1} < \frac{e}{2} \qquad (a)$$

Sea por otra parte $b_2 = \frac{p}{q}$ donde p y q son enteros primos entre si, sea además:

$$a_1^{\frac{1}{q}} = \alpha_1 \qquad y \qquad a_2^{\frac{1}{q}} = \alpha_2$$

entonces:

$$a_2^{b_2} - a_1^{b_2} = a_2^{\frac{p}{q}} - a_1^{\frac{p}{q}} = \alpha_2^p - \alpha_1^p$$

de donde

$$a_2^{b_2} - a_1^{b_2} = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2^{p-1} + \alpha_2^{p-2}\alpha_1 + \cdots\cdots + \alpha_2\alpha_1^{p-2} + \alpha_1^{p-1})$$

y

$$a_2 - a_1 = (\alpha_2^q - \alpha_1^q) = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2^{q-1} + \alpha_2^{q-2}\alpha_1 + \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots + \alpha_2\alpha_1^{q-2} + \alpha_1^{q-1})$$

luego

$$a_2^{b_2} - a_1^{b_2} = \frac{\alpha_2^{p-1} + \alpha_2^{p-2}\alpha_1 + \cdots\cdots + \alpha_2\alpha_1^{p-2} + \alpha_1^{p-1}}{\alpha_2^{q-1} + \alpha_2^{q-2}\alpha_1 + \cdots\cdots + \alpha_2\alpha_1^{q-2} + \alpha_1^{q-1}}(a_2 - a_1)$$

y

$$a_2^{b_2} - a_1^{b_2} < \frac{ph^{p-1}}{qh^{q-1}}(a_2 - a_1)$$

ahora tomando $a_2 - a_1 < \frac{qh^{q-1}}{ph^{p-1}} \cdot \frac{e}{2}$ queda finalmente

$$a_2^{b_2} - a_1^{b_2} < \frac{e}{2} \qquad (b)$$

y sumando (a) con (b):

$$a_2^{b_2} - a_1^{b_1} < e$$

De aquí entonces que las clases $A_1^{B_1}$ y $A_2^{B_2}$ definen un número real y de acuerdo con las consideraciones anteriores daremos la siguiente definición: Si $\alpha = (A_1, B_1)$ y $\beta = (B_1, B_2)$ son dos números reales definidos en el campo de los racionales positivos con $\alpha > 1$, llamaremos potencia β de α al número real definido por las clases $A_1^{B_1}$ y $A_2^{B_2}$. Este número lo designaremos por α^{β}.

Si $0 < \alpha < 1$, se tendrá $\frac{1}{\alpha} > 1$ y entonces por definición:

$$\alpha^{\beta} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

Ahora como

$$\frac{1}{\alpha} = \left(\frac{1}{A_2}, \frac{1}{A_1}\right)$$

Se tendrá

$$\frac{1}{\alpha}^{\beta} = \left(\frac{1}{A_2^{B_1}}, \frac{1}{A_1^{B_2}}\right)$$

y luego

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha}^{\beta}} = \left(\frac{1}{\frac{1}{A_1^{B_2}}} \quad \frac{1}{\frac{1}{A_2^{B_1}}}\right)$$

o sea

$$\alpha^{\beta} = \left(A_1^{B_2}, A_2^{B_1}\right) \qquad \text{para } 0<\alpha<1 \text{ y } \beta>0$$

Si β es negativo,por definición:

$$\alpha^{\beta} = \frac{1}{\alpha^{-\beta}}$$

Suponiendo primeramente $\alpha > 1$; puesto que:

$$-\beta = (-B_2, -B_1) > 0$$

resulta

$$\alpha^{-\beta} = (A_1^{-B_2}, A_2^{-B_1})$$

y luego

$$\frac{1}{\alpha^{-\beta}} = \left(\frac{1}{A_2^{-B_1}}, \frac{1}{A_1^{-B_2}}\right)$$

o sea

$$\alpha^{\beta} = (A_2^{B_1}, A_1^{B_2}) \quad \text{para } \alpha > 1 \text{ y } \beta < 0$$

Contrariamente si $0 < \alpha < 1$ se tiene

$$\alpha^{-\beta} = (A_1^{-B_1}, A_2^{-B_2})$$

luego

$$\alpha^{\beta} = \frac{1}{\alpha^{-\beta}} = \left(\frac{1}{A_2^{-B_2}}, \frac{1}{A_1^{-B_1}}\right)$$

o sea

$$\alpha^{\beta} = (A_2^{B_2}, A_1^{B_1}) \quad \text{para } 0 < \alpha < 1 \text{ y } \beta < 0$$

De modo que resumiendo podemos decir: Si $\alpha = (A_1, A_2)$ y $\beta = (B_1, B_2)$ son dos números reales, el número α^{β} se define como se indica:

Para $\alpha > 1$ y $\beta > 0$: $\alpha^{\beta} = (A_1^{B_1}, A_2^{B_2})$

Para $0 < \alpha < 1$ y $\beta > 0$: $\alpha^{\beta} = (A_1^{B_2}, A_2^{B_1})$

Para $\alpha > 1$ y $\beta < 0$: $\alpha^{\beta} = (A_2^{B_1}, A_1^{B_2})$

$$\text{Para } 0<\alpha<1 \quad y\ \beta<0 \ : \quad \alpha^{\beta} = (A_2^{B_2}, A_1^{B_1})$$

En las igualdades precedentes debe entenderse que:
$(A_1^{B_1}, A_2^{B_2})$ representa la cortadura definida por las clases $A_1^{B_1}$ y $A_2^{B_2}$ y así sucesivamente. Finalmente si $\alpha = 1$ y β un número real cualquiera, definiremos α^{β} por:

$$1^{\beta} = 1$$

y si α es un número real cualquiera y $\beta = 0$ se definirá:

$$\alpha^{0} = 1$$

Demostraremos ahora que las propiedades formales de la potencia subsisten aún cuando el exponente es un número real cualquiera.

Teorema 27°.-

Si α es un número real positivo y β y γ dos números reales cualesquiera, se tiene

$$\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}$$

D.-

Supongamos primeramente $\alpha > 1$ y β y γ positivos, entonces si $\alpha = (A_1, A_2)$, $\beta = (B_1, B_2)$ y $\gamma = (C_1, C_2)$, los números α^{β} y α^{γ} quedan determinados por las clases $A_1^{B_1}$, $A_2^{B_2}$ y $A_1^{C_1}$, $A_2^{C_2}$ respectivamen mente y por consiguiente el número $\alpha^{\beta}\cdot\alpha^{\gamma}$ por las clases $A_1^{B_1}\cdot A_1^{C_1}$, $A_2^{B_2}\cdot A_2^{C_2}$.

Por otra parte se tiene que el número $\alpha^{\beta+\gamma}$ está determinado por las clases $A_1^{B_1+C_1}, A_2^{B_2+C_2}$ y como para los racionales se tiene que

$$a^b\cdot a^c = a^{b+c}$$

resulta que las clases que definen los números $\alpha^{\beta}\cdot\alpha^{\gamma}$ y $\alpha^{\beta+\gamma}$ son idénticas, de ahí entonces que estos números sean iguales, o sea que $\alpha^{\beta}\cdot\alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}$

La generalidad del teorema se establece fácilmente apoyándose en las definiciones precedentes.

Teorema 28°.-

Si α y β son números reales positivos y γ un número real cualquiera, se tiene:

$$\alpha^{\gamma}\cdot\beta^{\gamma} = (\alpha\cdot\beta)^{\gamma}$$

D.-

Supongamos primeramente que α y β sean mayores que 1. Si $\alpha = (A_1,A_2)$, $\beta = (B_1,B_2)$ y $\gamma = (C_1,C_2) > 0$, los números α^{γ} y β^{γ} quedan determinados por las clases $A_1^{C_1}, A_2^{C_2}$ y $B_1^{C_1}, B_2^{C_2}$ respectivamente y por lo tanto el número $\alpha^{\gamma}\cdot\beta^{\gamma}$ queda determinado por $A_1^{C_1}\cdot B_1^{C_1}$ y $A_2^{C_2}\cdot B_2^{C_2}$.

Por otra parte se tiene que el número $(\alpha\cdot\beta)^{\gamma}$ está determinado por las clases $(A_1B_1)^{C_1}$ y $(A_2\cdot B_2)^{C_2}$ y como para los racionales se tiene

$$a^c\cdot b^c = (a\cdot b)^c$$

resulta que las clases que definen los números $\alpha^{\gamma}\cdot\beta^{\gamma}$ y $(\alpha\cdot\beta)^{\gamma}$ son idénticas, de aquí entonces que $\alpha^{\gamma}\cdot\beta^{\gamma} = (\alpha\cdot\beta)^{\gamma}$.

Respecto a la generalidad del teorema vale aquí también la observación indicada en la demostración del teorema anterior.

Teorema 29°.-

Si α es un número real positivo y β y γ dos números reales, se tiene:

$$\left(\alpha^{\beta}\right)^{\gamma} = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$$

D.-

Supongamos α mayor que uno y β y γ positivos. Empleando las mismas notaciones usadas en los teoremas anteriores, el número α^{β} queda determinado por las clases $A_1^{B_1}$ y $A_2^{B_2}$ y por consiguiente el número $\left(\alpha^{\beta}\right)^{\gamma}$ por $\left(A_1^{B_1}\right)^{C_1}$ y $\left(A_2^{B_2}\right)^{C_2}$.

Ahora por otra parte el número $\alpha^{\beta\cdot\gamma}$ está determinado por las clases $A_1^{B_1\cdot C_1}$ y $A_2^{B_2\cdot C_2}$ y teniendo en cuenta que para los racionales

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

resulta que las clases que definen los números $(\alpha^{\beta})^{\gamma}$ y $\alpha^{\beta\cdot\gamma}$ son idénticas y por consiguiente $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$. El teorema se extiende sin dificultad al caso en que β o γ o ambos a la vez sean negativos y cuando α siendo siempre positivo sea menor que uno.

11.- Cortaduras en el campo de los números reales.- Si se efectúa con los números reales, las operaciones hasta ahora definidas, se obtiene como resultado números reales. Se puede preguntar ahora si efectuando cortaduras en el campo de los números reales resultará siempre un número real, o dicho con otras palabras ¿las cortaduras en el campo de los números reales podrán reducirse siempre a cortaduras en el campo de los números racionales?

La respuesta a esta pregunta viene dada en forma afirmativa por el conocido Teorema de Dedekind que presentamos a continuación.

Teorema 30°.-
Si el conjunto de los números reales se divide en dos clases A y B tales que:

1ª Cada clase contiene a lo menos un número.
2ª todo número real pertenece a una de las dos clases y
3ª Todo número de la clase A es menor que todo número de la clase B.

Entonces existe un número real α tal que todos los números menores que α pertenecen a la clase A y todos los números mayores que α pertenecen a la clase B. El número α puede tomarse como perteneciente a cualquiera de las dos clases.

D.-
Sean A' y B' las clases de los números racionales contenidos en A y en B respectivamente, enton-

ces de acuerdo con la definición de A y B se sigue inmediatamente que A' y B' constituyen una cortadura (A',B') en el campo de los racionales y por consiguiente las clases A y B definen un número real $\alpha = (A',B')$. Nosotros probaremos que este número real α es único y que satisface las condiciones del teorema. Para este efecto distinguiremos dos casos:

a) Si α es un real racional, él es el más grande de la clase A' o bien el menor de la clase B'. Suponiendo a α el mayor de A' él debe ser también el mayor de A, pués suponiendo que existiera en A un número $\beta > \alpha$ habría entre α y β, racionales tales como $\frac{(\alpha+\beta)}{2}$, mayores que α, los cuales pertenecerían a B' y por lo tanto también a B, lo que implica contradicción. Similarmente si α es el menor número de B' él debe ser también el menor de B.

b) Si α es un real irracional él es mayor que todos los números de A' y el menor que todos los números de B'. Razonando de manera análoga a la precedente se hace ver que α es también mayor que los números de A y menor que los números de B.

Finalmente es fácil comprender que α es único, pués si hubiere otro α el medio aritmético de ellos no pertenecería a ninguna de las dos clases.

Corolario.-

Si los números de un intervalo (a,b) son divididos en dos clases A y B que cumplan las condiciones del Teorema de Dedekind, esa clasificación define un número real. Pues basta tomar con A todos los reales x tales que $x \leq a$ y con B todos los reales y tales que $y \geq b$.

El teorema de Dedekind nos ha mostrado que toda cortadura en el campo de los números reales define un número real, esta propiedad distingue al conjunto de los números reales del conjunto de los números racionales, pues en este último conjunto hay cortaduras que definen números que no pertenecen a él. Debido a esta circunstancia se suele decir que el conjunto de los números reales es perfecto o cerrado.

12.- Logaritmo de un número real.- Sean α y β dos números reales positivos, si α es diferente de uno nosotros haremos ver que siempre existe un número real ξ y solamente uno tal que:

$$\alpha^{\xi} = \beta .$$

este número ξ lo llamaremos el logaritmo de β con base α y pondremos:

$$\xi = {}^{\alpha}\log\beta$$

Teorema 31°.-

Si α y β son dos números reales positivos, siendo α diferente de uno, existe un número real y solamente uno tal que $\alpha^{\xi} = \beta$.

D.-

Si α y β son reales racionales corresponde a ellos en el campo de los racionales dos números a y b y si en este campo existe un número x tal que $a^x = b$, entonces el número real correspondiente a este racional x será el número buscado. Supongamos que tal cosa no ocurre y consideremos los números α y β definidos en el campo de los reales positivos; sea además $\alpha > 1$.

Dividamos el conjunto de los números reales positivos en dos clases R y S de acuerdo con el criterio siguiente: la clase R contendrá todos los reales ρ tales que $\alpha^{\rho} < \beta$; la clase S contendrá todos los reales σ tales que $\alpha^{\sigma} > \beta$. Se comprende sin dificultad que ésta clasificación es tal que ambas clases no son vacías, que todo número real positivo pertenece a una y solamente a una de ellas, pues no existe un racional x tal que si ξ es su real correspondiente se tenga $\alpha^{\xi} = \beta$, y finalmente se vé que todo número de la clase R es menor que todo número de la clase S, ya que de $\alpha^{\rho} < \alpha^{\sigma}$ se sigue que $\rho < \sigma$. Así pues la clasificación hecha define un número real $\xi = (R,S)$ y solamente uno tal que:

$$\alpha^{\rho} < \alpha^{\xi} < \alpha^{\sigma}$$

Ahora se tiene también que

$$\alpha^{\rho} < \beta < \alpha^{\sigma}$$

y siendo denso el conjunto de los racionales, también lo sea el conjunto de los números reales y se tendrá

$\alpha^{\sigma} - \alpha^{\rho} < \varepsilon$ siendo $\varepsilon > 0$ un número real arbitrario; de aquí que podamos asegurar la igualdad entre los números α^{ξ} y β, o sea:

$$\alpha^{\xi} = \beta$$

Si $\alpha < 1$, se tiene $\dfrac{1}{\alpha} > 1$ y por lo tanto de acuerdo con lo anterior existe un número ξ tal que:

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\xi} = \frac{1}{\beta}$$

y por lo tanto tal que

$$\alpha^{\xi} = \beta$$

Ahora con ayuda de los teoremas establecidos para las potencias se demuestra sin dificultad las propiedades aritméticas de los logaritmos.

- oOo -

C A P I T U L O   II

CONJUNTOS DE NUMEROS

13.- Los conceptos: unidad y conjunto.- Las ideas de unidad y pluralidad son para nosotros ideas primitivas y, por lo tanto, no las definiremos. Todos sabemos distinguir entre una y varias cosas y cuando prescindimos de la naturaleza de cada cosa y de la posición con respecto a las otras si son varias, nace en nosotros los conceptos de unidad y pluralidad, respectivamente.

Estas ideas de unidad y pluralidad tienen un valor puramente relativo pues cada cosa o ente material es a su vez un conjunto de otros entes que lo componen, y toda pluralidad puede considerarse también como unidad. Así por ejemplo la Universidad Católica es una unidad como universidad y una pluralidad como reunión de facultades.

Nosotros llamaremos indistintamente conjunto o clase, y asi lo hemos hecho hasta ahora, a una pluralidad determinada y a cada uno de los objetos que la forman lo llamaremos un elemento del conjunto. Se suele decir que el conjunto contiene o encierra sus elementos, que él está compuesto de sus elementos y que los elementos pertenecen al conjunto.

Hay dos caminos para determinar un conjunto, método que los lógicos llaman: por extensión y por comprensión. Podemos enunciar sus elementos, como cuando decimos: el conjunto que considero se compone de Pedro, Juan y Diego. También podemos mencionar una propiedad determinada de cada elemento del conjunto, como cuando hablamos de los "habitantes de Santiago".

Vemos que el método de determinación de un conjunto por extensión, consiste en enunciar cada una de las unidades que componen el conjunto; en el método de definición por comprensión, el conjunto queda determinado dándose las características generales que pertenecen a cada uno de sus elementos, y solamente a ellos, de tal modo que, mediante estas propiedades características, los elementos del conjunto se distinguen de los demás.

De estos dos tipos de definiciones el último está más de acuerdo con la matemática, ya que si se estudiara solamente los conjuntos definidos por extensión ella quedaría sujeta a las restricciones impuestas por las dificultades materiales de la enumeración efectiva de todos sus elementos sobre todo si el conjunto es muy numeroso. De acuerdo con esto nosotros diremos que un conjunto está determinado o dado cuando establecido un convenio cualquiera no contradictorio podemos decir si un ente u objeto dado pertenece o no pertenece al conjunto.

Un conjunto cuyos elementos son los objetos a, b,c,..... l será designado por (a,b,c, ... l). El símbolo (a,b) designa un conjunto formado por una pareja de elementos que son los objetos a y b . Los símbolos (a,b) y (b,a) designan el mismo conjunto. Un conjunto no depende del orden de sus elementos.

De acuerdo con nuestra notación (a) designa el conjunto formado por un solo elemento que es el objeto a. Se podría alegar que él no es un conjunto, esto no es sino una cuestión de terminología, pero si se quiere convenir que todo conjunto contenga a lo menos una pareja de elementos, resultan numerosos inconvenientes en los enunciados de muchas proposiciones sobre conjuntos. A este respecto iremos aún más lejos y emplearemos a menudo la frase "conjunto nulo" queriendo significar con esto la ausencia de elementos.

Una cuestión importante respecto del conjunto formado por un solo elemento es que él no debe considerarse como idéntico o igual con su elemento o en otras palabras que la relación $(a) = a$ implica contradicción y que por lo tanto es necesario distinguir entre el conjunto formado por un solo elemento y el elemento mismo.

Definición:

Si todo elemento de un conjunto A_1 es también elemento de un conjunto A, se dice que el conjunto A_1 es una parte o subconjunto de A y se acostumbra a expresar esto con la notación:

$$A_1 \subset A \qquad \text{o bién} \qquad A \supset A_1$$

La relación entre dos conjuntos A y A_1 expresada por el signo $\subset$ se llama de inclusión. El símbolo $A_1 \subset A$ se lee: el conjunto A_1 está contenido en el conjunto A y la fórmula $A \supset A_1$ expresa que el conjunto A contiene al conjunto A_1.

La relación de inclusión es tránsitiva, es decir que las fórmulas

$$A \subset B \qquad \text{y} \qquad B \subset C$$

implican:

$$A \subset C$$

Además para todo conjunto A se tiene la relación:

$$A \subset A$$

Definición:

Si entre dos conjuntos A y B se verifican simultáneamente las dos relaciones:

$$A \subset B \qquad y \qquad B \subset A$$

diremos que los dos conjuntos son iguales o idénticos y pondremos:

$$A = B$$

Para indicar que dos conjuntos A y B no son idénticos se escribirá:

$$A \neq B$$

Si un conjunto A_1 es un subconjunto de A, pero recíprocamente A no es subconjunto de A_1, se dirá que el conjunto A_1 es una parte propia o parte alicuota o aún verdadero subconjunto de A. De aquí que para que un conjunto A_1 sea parte alicuota de un conjunto A es necesario y suficiente que se tenga simultáneamente:

$$A_1 \subset A \qquad y \qquad A_1 \neq A.$$

14.- Equivalencia de conjuntos.- He aquí otro concepto primario lo mismo que el de unidad y pluralidad. La noción de equivalencia está implicada en la operación de contar y es lógicamente más simple aunque menos familiar.

Entenderemos por correspondencia entre dos conjuntos dados A y B, un criterio por el cual a cada elemento de uno de ellos se le asocie uno o varios elementos del otro. De acuerdo con esto la correspondencia entre dos conjuntos A y B esta evidentemente individualizada cuando se conoce para cada elemento de A, el o los elementos de B que le corresponden. Los elementos de ambos conjuntos que se corresponden se llaman correspondientes u homólogos. La noción de correspondencia o coordinación es independiente del orden.

Definición:

Una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos A y B se dice biunívoca cuando a cada elemento de A corresponde uno y solamente un elemento de B y recíprocamente a cada elemento de B corresponde uno y solamente un elemento de A.

Para expresar que entre dos conjuntos A y B existe una correspondencia biunívoca pondremos:

$$A \sim B$$

y diremos para abreviar que A es equivalente con B. De la precedente definición de equivalencia resultan inmediatamente las siguientes propiedades:

1° El principio de identidad expresado por:

$$A \sim A$$

en efecto a cada elemento del conjunto A se le puede asignar el mismo como homólogo.

2° El principio de simetría, de acuerdo con el cual, la relación:

$$A \sim B \quad \text{implica} \quad B \sim A$$

Ya que establecida una correspondencia entre A y B queda establecida también otra correspondencia entre B y A.

3° El principio de transitividad de acuerdo con el cual, las relaciones:

$$A \sim B \qquad y \qquad B \sim C$$

implican

$$A \sim C$$

en efecto si al elemento a de A corresponde el elemento b de B y a este el elemento c de C , basta adoptar c como homólogo de a; recíprocamente como c de C tiene homólogo en B y este uno sólo en A queda establecida la correspondencia biunívoca entre los conjuntos A y C.

Postulado:

Entre el conjunto de los números reales y el conjunto de los puntos de una recta dirigida (eje) existe una correspondencia biunívoca.

De acuerdo con este postulado será frecuente que en adelante usemos como sinónimos los vocablos punto y número.

Todo conjunto de números que pueda ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales lo llamaremos conjunto numerable .

15.- Conjuntos finitos e infinitos.- Una noción importante que creemos poseer por intuición con claridad perfecta, pero que nos opone graves dificultades apenas la analizamos, es la noción de conjunto finito. A primera vista ocurre considerar como finitos los conjuntos cuyos elementos se pueden enunciar sucesivamente, es decir los conjuntos definibles por extensión, pero hay una imposibilidad material para enunciar los conjuntos, lo cual depende de la finitud de nuestra vida. Para excluir estos factores subjetivos ajenos a los conjuntos mismos, es necesario dar una definición lógica, que permita deducir por razonamiento, sin recurrir a experiencias imposibles, si un conjunto cualquiera dado es finito o nó. Así tomaremos la definición siguiente:

Definición:
Un conjunto se dirá infinito cuando él sea equivalente con una de sus partes alícuotas. Un conjunto se dice finito cuando no es infinito.

De acuerdo con esta definición si un conjunto A es finito, el queda caracterizado por:

$$A_1 \subset A \; ; \qquad A_1 \sim A \quad y \quad A_1 = A$$

y un conjunto infinito por:

$$A_1 \subset A \; ; \qquad A_1 \sim A \quad y \quad A_1 \neq A$$

El conjunto de los números naturales es infinito ya que el puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto:

$$2, 4, 6, 8, \ldots\ldots , 2n, \ldots$$

No terminaremos estas ideas sobre conjuntos sin antes referirnos a la noción de orden. Buscando una noción de orden, de lo primero que es necesario compenetrarse es que ningún conjunto posee un orden único con exclusión de otros. Un conjunto de elementos tiene todos los órdenes de que es susceptible. El concepto de orden supone el de duración en el tiempo o el de ubicación en el espacio que permite percibir los elementos de un conjunto en instantes o en lugares diferentes, definiendo una correspondencia entre aquellos elementos y estos instantes o lugares.

Todo criterio de ordenación se puede establecer arbitrariamente pero ha de satisfacer las dos siguientes condiciones:

1° Permitir fijar sin ambigüidad cuando un elemento de un conjunto es anterior o precede a otro, el cual se dice entonces que es posterior o siguiente de aquel.

2° Si el elemento a precede a b y este a c, el elemento a debe preceder a c.

Así refiriéndonos a conjuntos de números precisaremos aquí la noción de orden que hemos utilizado ya en el conjunto de los números reales.

Definición:

Un conjunto de números se dice ordenado cuando para cada par a y b de sus elementos ($a \neq b$) se puede establecer una y solamente una de las relaciones:

$$a < b \qquad \text{o} \qquad a > b$$

y para toda terna de elementos tales que:

$$a < b \qquad \text{y} \qquad b < c$$

se tenga:

$$a < c$$

El conjunto vacío y el conjunto de un sólo elemento serán ordenados por definición; en cuanto al conjunto de dos elementos a y b se considerará ordenado si se establece entre ellos la relación:

$$a < b \qquad \text{o bien} \qquad a > b$$

Si a es un número menor que b y no hay ningún número que sea mayor que a y menor que b se dice que a y b son dos números consecutivos; b se llama entonces siguiente de a.

Un número que es menor que todos los demás números del conjunto ordenado se llama primer elemento de éste. El número mayor que todos los demás números del conjunto se llama último elemento del conjunto.

16.- <u>Conjuntos acotados</u>.- En todas las consideraciones que en lo sucesivo hagamos sobre conjuntos, nos referiremos únicamente a conjuntos de números es decir a conjuntos cuyos elementos son números reales.

Llamaremos variable al símbolo, x, que nos representa los distintos elementos (números) de un conjunto X de números que se llama su campo de variabilidad o dominio de la variable. De este modo cuando empleemos la frase "la variable x" no deberá pensarse en un número determinado del conjunto X, sino en la posibilidad de tomar uno cualquiera de ellos, el que se desee.

Cuando el campo de variabilidad de una variable x está formado por el conjunto de todos los números reales comprendidos entre dos números a y b, él se llama intervalo de la variable. El intervalo determinado por los números a y b con $a < b$ lo designaremos por (a,b). Si los números a y b se incluyen en el intervalo, se dice de él que es un intervalo cerrado; si dichos números se excluyen el intervalo se dice abierto; si se excluye a y no b el intervalo se dice abierto por la izquierda y finalmente si se excluye b y nó a, él se dice abierto por la derecha.

Un conjunto de números se dice acotado superiormente, si existe un número K mayor que todo número del conjunto. Análogamente un conjunto se dice acotado inferiormente, si existe un número H menor que todo número del conjunto. Los números K y H se llaman cota superior y cota inferior del conjunto.

De esta definición se desprende que si K es cota superior de un conjunto, también lo es cualquier número mayor que K. Del mismo modo si H es cota inferior de un conjunto igual cosa ocurre con todo número menor que H.

La acotación de un conjunto puede ser por ambos o por uno u otro sentido. En el primer caso diremos simplemente que el conjunto está acotado; así el conjunto de los números comprendidos entre (- 1) y (+ 1) es acotado en ambos sentidos, mientras que el conjunto de los números positivos enteros sólo está acotado inferiormente o como suele decirse, en vista de la representación de los números como puntos de un eje, por la izquierda.

Para todo conjunto infinito de números acotado superiormente o por la derecha se puede demostrar la existencia de un número M, que tiene las dos siguientes propiedades:

1° $M \geq$ que todo número del conjunto.

2° $M - \varepsilon <$ algún número del conjunto; siendo ε un número positivo arbitrario.

Este número M se llama frontera superior del conjunto y la propiedad enunciada del conjunto acotado superiormente se expresa por el siguiente teorema:

Teorema 32°.

Todo conjunto infinito de números acotado superiormente tiene una frontera superior M.

D.

En esta demostración distinguiremos dos casos. Comenzaremos considerando un conjunto tal que él tiene un elemento mayor que todos los demás, sea a este elemento; en este primer caso afirmamos que M=a, en efecto siendo a el mayor de los números del conjunto se tiene que no hay ningún nú mero del conjunto mayor que M y además como $a - \varepsilon \leq a$ resulta: $M - \varepsilon < a$.

Como segundo caso consideraremos un conjunto que no tiene un elemento mayor que todos los demás. En estas circunstancias tomemos el conjunto de los números reales y clasifiquemos sus elementos en dos clases A y B del siguiente modo: en la clase inferior A colocaremos todos los números del conjunto y los que son menores que cualquier número del conjunto y en la superior B todos los números mayores que todo número del conjunto. De acuerdo con esta clasificación se vé que en ambas clases hay números, en A a lo menos los números del conjunto, en B a lo menos la cota superior K; todo número de A es menor que todo número de B y finalmente todo número real pertenece a una u otra clase. De aquí estonces que la clasificación precedente constituye una cortadura (A,B) en el campo de los números reales y por consiguiente ella define un número real. Veremos inmediatamente que este número es precisamente lo que hemos llamado frontera superior. En efecto si designamos con M el número definido por la cortadura (A,B) se tiene que M es mayor que todo número de A y por consiguiente que todo número del conjunto. Además cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, el número $M - \varepsilon$ pertenecerá a la clase A y por consiguiente habrá a lo menos un número del conjunto mayor que $M - \varepsilon$ puesto que en el conjunto hemos supuesto que no hay un número mayor que todos los demás.

Análogamente se define como frontera inferior de un conjunto de números un número m tal que:

1° $m \leq$ todo número del conjunto

2° $m + \varepsilon >$ que algún número del conjunto; cualquiera que sea el número $\varepsilon > 0$ que se tome.

De igual modo a lo hecho precedentemente se demuestra que:

Teorema 33.-

Todo conjunto infinito de números acotado inferiormente tiene una frontera inferior m.

De los dos teoremas precedentes se desprende como una consecuencia inmediata el teorema siguiente.

Teorema 34.-

Todo conjunto infinito de números acotado tiene una frotera inferior y una frontera superior.

17.- Punto de acumulación de un conjunto de números.-

Si a es un número real cualquiera y η un número positivo (pequeño), el intervalo $(a - \eta, a + \eta)$ se llama vecindad o entorno del punto o número a.

Definición:

Se dice que un número es punto de acumulación o número de condensación de un conjunto si en toda vecindad de él existen infinitos números del conjunto.

Un punto de acumulación de un conjunto no es necesariamente un elemento del conjunto; así en el conjunto:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{1}{n}, \ldots\ldots$$

el cero es punto de acumulación y no pertenece al conjunto. El conjunto de los números del intervalo abierto $(0,1)$ tiene por puntos de acumulación los números cero y uno, números que no pertenecen a dicho conjunto. El conjunto de todos los números enteros no tiene puntos de acumulación. En el conjunto de números contenidos en el intervalo cerrado $(0,1)$ todo número es número de acumulación.

Dado un conjunto, se llama derivado a aquel formado por los puntos de acumulación del conjunto dado. Si un conjunto coincide con su conjunto derivado se dice que él es perfecto.

He aquí un conjunto que tiene dos puntos de acumulación los cuales no pertenecen al conjunto:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{6}{7}, \ldots\ldots\ldots$$

Teorema 35 .-

Todo conjunto infinito de números, acotado, tiene a lo menos un punto de acumulación.

D.- Dividamos el conjunto de todos los números reales en dos clases, La clase A la formamos con todos los números a, tales que a su derecha hay una infinidad de números del conjunto. La clase B la formamos con todos los números b, tales que a su derecha hay finitos números del conjunto.

Se vé sin dificultad que esta clasificación satisface a las tres condiciones que exige una cortadura y por consiguiente define un número real α. De aquí entonces que $\alpha - \varepsilon$ pertenece a la clase A y a la izquierda de $\alpha - \varepsilon$ hay a lo más un número finito de números del conjunto; contrariamente $\alpha + \varepsilon$ pertenece a la clase B y a la izquierda de $\alpha + \varepsilon$ hay infinitos números del conjunto; por consiguiente entre $\alpha - \varepsilon$ y $\alpha + \varepsilon$ hay infinitos elementos del conjunto o sea que α es un punto de acumulación del conjunto, lo que demuestra el teorema.

Este teorema se conoce con el nombre de Teorema de Bolzano-Weiers Trass.

Observación:

Como a la izquierda de $\alpha - \varepsilon$ existen a lo más, un número finito de números del conjunto, puede afirmarse que en esta región no puede haber ningún otro punto de acumulación, es decir α es el punto de acumulación situado más a la izquierda, si se quiere el menor de los puntos de acumulación; a él se le llama simplemente límite inferior del conjunto, designándosele por la notación $\underline{\text{lím}}\ C$.

De un modo análogo se demuestra la existencia de un punto de acumulación situado más a la derecha que los demás (β) que se llama límite superior del conjunto, se representa por la notación $\overline{\text{lím}}\ C$ y está caracterizada por que a la derecha de $\beta + \varepsilon$ haya a lo más un número finito de elementos del conjunto y a la derecha de $\beta - \varepsilon$ hay infinitos números de dicho conjunto.

Entre ambos límites existe evidentemente la relación $\alpha \leqslant \beta$. Tanto α como β, que se llaman los límites principales del conjunto pueden no pertenecer al conjunto.

Para el conjunto:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \ldots\ldots\ldots$$

Se tiene $\alpha = 0$ y $\beta = 1$. Ambos números no pertenecen al conjunto.

Para el conjunto:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots$$

se tiene $\alpha = \beta = 0$

Si ocurre que $\alpha = \beta$ (sin ser infinitos) como en el caso precedente, este número único se llama simplemente límite del conjunto y se le representa por la notación lím. Este número, que designaremos con la letra l, es entonces el único punto de acumulación que tiene el conjunto y él queda caracterizado porque tanto a la izquierda de $l - \varepsilon$ como a la derecha de $l + \varepsilon$ sólo puede haber un número finito de elementos del conjunto, mientras que entre ambos existen infinitos números de él.

Estas definiciones y teoremas que hemos conocido se aplican a todos los conjuntos de números reales y por consiguiente a todos los conjuntos de puntos sobre una recta y en particular a un grupo importante de conjuntos numéricos que conoceremos bajo el nombre de sucesiones.

Cuando un conjunto de números no es acotado superiormente se suele decir que su cota superior es infinito $(+\infty)$, se dice también a veces que su límite superior es $(+\infty)$. Algo análogo se suele expresar para conjuntos no acotados inferiormente con respecto al símbolo $(-\infty)$.

18.- Ejercicios propuestos.-

1° Indicar las características de los conjuntos:

$$E_1 = \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots\ldots$$

$$E_2 = 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{1}{n!}, \ldots\ldots$$

$$E_3 = -1, 2, -3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots, (-1)^n n, \ldots\ldots$$

$$E_4 = 1, 1, 1, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, n^{\operatorname{sen} n\pi}, \ldots\ldots$$

2° Determinar el término general de los conjuntos siguientes, e indicar sus características.

$$E_1 = 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$E_2 = -2,\ 1\tfrac{1}{2},\ -1\tfrac{1}{3},\ 1\tfrac{1}{4},\ -1\tfrac{1}{5},\ 1\tfrac{1}{6},\ \ldots\ldots\ldots$$

$$E_4 = \frac{1}{1},\ 2,\ \frac{1}{3},\ 4,\ \frac{1}{5},\ 6,\ \frac{1}{7},\ \ldots\ldots$$

$$E_5 = 0,\ 6,\ 6,\ 20,\ 20,\ 42,\ 42,\ \ldots\ldots\ldots$$

3° Demostrar que la frontera superior de un conjunto de números menores que un número fijo k no puede ser mayor que este número.

4° Demostrar que la frontera inferior de un conjunto de números mayores que un cierto número fijo h no puede ser menor que este número.

5° Demostrar que si M y m son la frontera superior e inferior respectivamente de un conjunto de números, la frontera superior e inferior de los simétricos de dichos números son $-m$ y $-M$.

6° Si un conjunto de números todos del mismo signo tiene como fronteras los números M y m, el conjunto de sus recíprocos tiene $\frac{1}{m}$ y $\frac{1}{M}$ como frontera superior e inferior respectivamente.

7° Si M y m son las fronteras de un conjunto de números, el conjunto de los valores absolutos de dichos números tiene por frontera superior al mayor de los números $|m|$ o $|M|$

8° Si M y m son las fronteras de un conjunto de números positivos; $M^{\frac{1}{n}}$ y $m^{\frac{1}{n}}$ son las fronteras superior e inferior del conjunto formado por la raiz aitmética n ésima de los elementos de dicho conjunto.

- oOo -

C A P I T U L O III

SUCESIONES.

(Funciones de una variable entera)

19.- Definición: Si a cada entero positivo $n = 1,2,3\ldots$ $\ldots, n, \ldots\ldots$ se hace corresponder un número a_n, el conjunto:

$$\{a_n\} = a_1 \; , \; a_2 \; , \; a_3 \; , \; \ldots\ldots\ldots, \; a_n, \; \ldots\ldots$$

se llama sucesión. De modo que entendemos por sucesión un conjunto infinito numerable de números reales.

Así por ejemplo son sucesiones:

$$\frac{2}{1} \; , \; \frac{3}{2} \; , \; \frac{4}{3} \; , \; \frac{5}{4} \; , \; \ldots\ldots\ldots\ldots, \; \frac{n+1}{n} \; , \; \ldots\ldots$$

$$1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \ldots\ldots, \frac{1}{n!}, \ldots\ldots$$

$$0, 1, 0, 1, \ldots\ldots, \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^n\right], \ldots\ldots$$

20.- Límites de sucesiones.- Precisaremos aquí para este tipo especial de conjunto, las definiciones sobre límites de conjuntos de números que ya dimos en el capítulo precedente. Tales definiciones fueron dadas para conjuntos infinitos acotados. Se demostró que un conjunto infinito acotado superior e inferiormente tiene un punto de acumulación mayor y otro menor que todos los que pudiera tener dicho conjunto. Estos puntos que designamos con α y β respectivamente los llamamos por definición límite inferior y límite superior del conjunto ($\alpha = \underline{\lim}\, C$ y $\beta = \overline{\lim}\, C$). Además cuando ocurría que $\alpha = \beta$ este número común lo llamamos simplemente límite del conjunto.

Definición:

Sea $\{a_n\}$ una sucesión acotada superior e inferiormente, sean α y β el menor y el mayor punto de acumulación respectivamente; α recibe el nombre de límite inferior de la sucesión y β el de límite superior:

$$\underline{\lim}\, a_n = \alpha \quad \text{y} \quad \overline{\lim}\, a_n = \beta$$

si ocurre que:

$$\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n = a$$

éste número común a se llama simplemente límite de la sucesión poniéndose:

$$\lim a_n = a$$

He aquí algunas sucesiones que nos muestran las diferentes situaciones que pueden presentarse en cuanto a sus límites se refiere:

$$a_n = (-1)^n \left\{1 + \frac{1}{n}\right\} ; -2, \ 1\tfrac{1}{2}, \ -1\tfrac{1}{3}, \ 1\tfrac{1}{4} \ -1\ \tfrac{1}{5}, \ 1\tfrac{1}{6} \ , \ldots\ldots$$

en este caso se tiene $\alpha = -1$ y $\beta = +1$

$$a_n = (-1)^n n \ ; \ -1, 2, -3, 4, -5, \ldots\ldots$$

aquí impropiamente hablando $\alpha = -\infty$ y $\beta = +\infty$

$$a_n = -\ n^{(-1)^n} ; \ \frac{1}{1}, \ 2, \ \frac{1}{3}, \ 4, \ \frac{1}{5}, \ 6, \ \frac{1}{7} \ , \ldots\ldots$$

aquí se tiene $\alpha = 0$ y $\beta = +\infty$

$$a_n = -\ n^{(-1)^n} ; \ -\frac{1}{1}, -2, -\frac{1}{3}, -4, -\frac{1}{5}, -6, \ldots\ldots$$

aquí $\alpha = -\infty$ y $\beta = 0$

$$a_n = n^0 \quad ; \quad 1, 1, 1, 1, \ldots\ldots$$

donde se verifica: $\alpha = \beta = a_n = a = 1$

Demostraremos ahora un teorema que nos permitirá dar a esta definición otra forma más usual y al mismo tiempo más cómoda para desarrollar numerosas e importantes propiedades de las sucesiones.

Teorema 36 : La condición necesaria y suficiente para que una sucesión $[a_n]$ tenga un límite a es que, dando arbitrariamente un número $\varepsilon > 0$, exista un entero N, dependiente de ε, tal que:

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{para todo } n > N$$

D.

Comenzaremos demostrando que si $\alpha = \beta = a$ debe verificarse que:

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{para todo } n > N$$

o sea que la condición es necesaria. En efecto si $\alpha = \beta = a$, tomando arbitrariamente un $\varepsilon > 0$, se tendrá a lo más un número finito de elementos de $[a_n]$ tales que:

$$a_n > \beta + \varepsilon = a + \varepsilon$$

y también a lo más un número finito de elementos de $[a_n]$ tales que:

$$a_n < \alpha - \varepsilon = a - \varepsilon$$

de aquí que para un número infinito de a_n se tiene:

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \beta + \varepsilon \qquad \text{para } n > N$$

o sea:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \qquad \text{para } n > N$$

o finalmente:

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{con tal que } n > N$$

Recíprocamente haremos ver ahora que la condición es suficiente o sea que si $|a_n - a| < \varepsilon$ para todo $n > N$ debe verificarse que:

$$\alpha = \beta = a$$

Si $|a_n - a| < \varepsilon$ para $n > N$ o lo que es lo mismo si $a - \varepsilon < a_n < a_n + \varepsilon$ para $n > N$, ocurre que $a_n < a - \varepsilon$ a lo más para un número finito de a_n; de modo que $a = \alpha$

De la desigualdad precedente se desprende también que: $a_n > a - \varepsilon$ para un número infinito de a_n y por lo tanto $a_n > a + \varepsilon$ a lo más para un número finito de a_n
De ahí que: $a = \beta$ y por consiguiente: $\alpha = \beta = a$

De acuerdo con este teorema recién demostrado podemos enunciar la definición de límite de una sucesión del siguiente modo:

Definición:

Se dice que una sucesión $[a_n]$ tiene un límite a cuando n crece indefinidamente, si dado un número arbitrario $\varepsilon > 0$ existe un número entero positivo N, dependiente de ε, tal que para todo:

$$n > N \qquad \text{se verifica que} \qquad |a_n - a| < \varepsilon$$

Cuando un sucesión tiene límite se dice que ella es convergente. Particularmente si $a = 0$ se dice de la sucesión $[a_n]$ que es una sucesión nula. Como un ejemplo de tal sucesión se tiene la siguiente:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots, \frac{1}{n}, \ldots.$$

pues si se toma un $\varepsilon > 0$ arbitrario, ocurre que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ para todo $n > N$ con $N > \frac{1}{\varepsilon}$.

Cuando una sucesión $[a_n]$ no tiene un límite único finito hay varias posibilidades que puedan ser consideradas:

Si los términos de la sucesión tienen la propiedad, que por grande que sea un número G que se tome, se puede encontrar un número entero N tal que:

$$a_n > G \qquad \text{para todo} \qquad n > N$$

se dice que ella diverge o bien que converge a infinito, lo que debe comprenderse bien equivale a decir que no converge. Simbólicamente se expresa esto poniendo:

$$a_n \longrightarrow \infty \qquad \text{cuando} \quad n \longrightarrow \infty$$

o bien:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$$

Similarmente si se puede encontrar un entero N tal que:

$$a_n < -G \qquad \text{para todo } n \geq N$$

la sucesión $[a_n]$ también se dice divergente. En las dos clases precedentes la sucesión es divergente, pero en un caso diverge hacia $+\infty$ y en el otro hacia $-\infty$.

Como ejemplos de tales sucesiones podemos citar:

$$a_n = n \;; \qquad 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, n, \ldots\ldots$$

$$a_n = -n \;; \qquad -1, -2, -3, \ldots\ldots, -n, \ldots\ldots$$

Cuando no existe el límite único a, la sucesión también se dice divergente.

21.- Teoremas sobre límites.- Los teoremas que veremos a continuación nos muestran algunas de las propiedades elementales más importantes de las sucesiones convergentes.

Teorema 37

Toda sucesión convergente es acotada.

D.

En efecto puesto que la sucesión tiene límite, dado un número $\varepsilon > 0$, existe un N tal que para $n > N$, se tiene:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

siendo a el límite de la sucesión. Se vé pués que a partir de cierto rango los términos de la sucesión quedan comprendidos entre $a - \varepsilon$ y $a + \varepsilon$ y como fuera de este intervalo hay a lo más un número finito de elementos de ella, siempre será posible encontrar una cota inferior y otra superior que comprenda todos los términos de la sucesión.

Teorema 38 Toda sucesión convergente tiene un límite solamente.

D.

Supongamos que la sucesión $\{a_n\}$ tenga dos límites a y a'; entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ que se tome existirá un N tal que si $n > N$

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad y \qquad a_n - a' < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ahora:

$$|a - a'| = |(a_n - a') + (a - a_n)| < |a_n - a'| + |a - a_n|$$

es decir:

$$|a - a'| \leq \varepsilon$$

y puesto que ε es arbitrario resulta que $a = a'$

Teorema 39 Si $\lim a_n = a$, entonces $\lim |a_n| = |a|$

D.

Puesto que $\{a_n\}$ tiene un límite a, dado un

$\varepsilon > 0$, existe un N tal que:

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{para todo } n > N$$

pero:

$$|a_n| - |a| \leqslant |a_n - a|$$

luego:

$$\big||a_n| - |a|\big| < \varepsilon \qquad \text{para todo } n > N$$

Teorema 40.-

Si $\lim a_n = a$, entonces $\lim ka_n = ka$

D.-

En efecto tomando un $\varepsilon > 0$, puede por hipótesis determinarse un entero positivo N tal que:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|k|} \qquad \text{para } n > N$$

de donde:

$$|ka_n - ka| < \varepsilon \qquad \text{para } n > N$$

o sea:

$$\lim ka_n = ka$$

Corolario:

Si los términos de una sucesión nula $[a_n]$ se multiplican por los correspondientes de una sucesión convergente $[b_n]$, la sucesión resultante $[a_n b_n]$ también es sucesión nula.

Teorema 41.-

Si $\lim a'_n = a$ y $\lim a''_n = a$ y a partir de cierto rango N_o la sucesión a_n es tal que:

$$a'_n < a_n < a''_n \qquad \text{para todo} \quad n > N$$

resulta entonces que $\lim a_n = a$.

D. Por hipótesis dado un $\epsilon > 0$ arbitrario, existe un número entero N_1 tal que:

$$|a'_n - a| < \varepsilon \qquad \text{para todo } n > N_1$$

y otro N_2 tal que:

$$|a''_n - a| < \varepsilon \qquad \text{para todo } n > N_2$$

o bien:

$$a - \varepsilon < a'_n < a + \varepsilon \qquad \text{para } n > N_1$$

$$a - \varepsilon < a''_n < a + \varepsilon \qquad \text{para } n > N_2$$

luego teniendo en cuenta que a partir desde un entero N_o se tiene:

$$a'_n < a_n < a''_n$$

resulta:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \qquad \text{para todo} \quad n > \text{que el mayor}$$

de los N_i es decir

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{con } n > N$$

o sea:

$$\text{lím } a_n = a$$

Teorema 42° Sí a_n converge hacia a y $[b_n]$ converge hacia b, entonces $[a_n + b_n]$ converge hacia $a = b$.

D.

Por hipótesis dado un $\varepsilon > 0$, existen N_1 y N_2 tales que:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para todo } n \geq N_1$$

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para todo } n \geq N_2$$

Ahora por otra parte se tiene:

$$(a_n + b_n) - (a + b) = (a_n - a) + (b_n - b)$$

luego:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < |a_n - a| + |b_n - b|$$

y para $n > N_1, N_2$ se tendrá:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

o sea:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon \qquad \text{para } n > N$$

es decir:

$$\lim (a_n + b_n) = a + b$$

Teorema 43° haco Si $\{a_n\}$ converge hacia a y $\{b_n\}$ converge hacia b, entonces $\{a_n \cdot b_n\}$ converge hacia ab.

D.
Tenemos:

$$ab - a_n b_n = a(b - b_n) + b_n(a - a_n)$$

de donde:

$$|ab - a_n b_n| < |a| \cdot |b - b_n| + |b_n| \cdot |a - a_n|$$

Pero puesto que: $\{b_n\}$ converge hacia b, ocurre que:

$$|b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2\,a} \qquad \text{para } n > N_1$$

y como hemos demostrado que toda sucesión convergente es acotada se tiene también:

$$b_n < B.$$

y finalmente como: a_n converge hacia a, se tiene:

$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2\,B} \qquad \text{para todo } n > N_2$$

y tomando n suficientemente grande resulta:

$$|ab - a_n b_n| < a\,\frac{\varepsilon}{2\,a} + B \cdot \frac{\varepsilon}{2\,B}$$

o sea:

$$|a_n b_n - ab| < \varepsilon \qquad \text{para } n > N$$

lo que demuestra el teorema:

Teorema 44° Si $[a_n]$ converge hacia a y $[b_n]$ converge a $b \neq 0$, entonces: $\left[\frac{a_n}{b_n}\right]$ converge hacia $\frac{a}{b}$

D. Tenemos:

$$\frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{ab_n - ba_n}{bb_n} = \frac{(ab_n - ab) + (ab - a_n b)}{bb_n}$$

o sea:

$$\frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{a(b_n - b)}{bb_n} + \frac{a - a_n}{b_n}$$

de donde:

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n}\right| \leq \frac{|a|}{|b| \cdot |b_n|}\,|b_n - b| + \frac{|a - a_n|}{|b_n|}$$

Sea ahora H un número tal que: $0<H<b$; entonces de acuerdo con los teoremas ya demostrados existe un N tal que:

$$|b_n| > H \qquad \text{para} \quad n > N_1$$

y también tomado un $\varepsilon > 0$ existen N_2 y N_3 tales que:

$$|b - b_n| < \frac{|b| \cdot H}{2\,|a|}\,\varepsilon \qquad \text{para} \quad n > N_2$$

$$|a - a_n| < \frac{H}{2}\,\varepsilon \qquad \text{para} \quad n > N_3$$

y por consiguiente para un N suficientemente grande se tiene:

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{a}{b \cdot H} \cdot \frac{b \cdot H}{2 \cdot a}\,\varepsilon + \frac{H\varepsilon}{2H}.$$

es decir:

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon \qquad \text{para todo} \quad n > N$$

que es lo que se podría demostrar.

Corolario:
Si $\lim a_n = a \neq 0$, entonces $\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$

Teorema 45° La condición necesaria y suficiente para la convergencia de una sucesión $\{a_n\}$ es que para todo número arbitrario $\varepsilon > 0$ exista un entero N, tal que:

$$|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon \qquad \text{para todo } n > N$$

siendo p un entero positivo

D.

Comenzaremos haciendo ver que la condición es necesaria, en efecto si a_n tiende hacia un límite a para todo $n > N$ se tiene:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |a_{n+p} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ahora como:

$$|a_n - a + a - a_{n+p}| \leq |a_n - a| + |a - a_{n+p}|$$

resulta:

$$|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon$$

Probaremos ahora que la condición es suficiente o sea que si

$$|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon \qquad \text{para todo } p>0 \text{ entero.}$$

debe verificarse que existe $\alpha = \beta = a$, único punto de acumulación del conjunto $\{a_n\}$.

De la desigualdad precedente se desprende inmediatamente que el conjunto a_n es acotado y por consiguiente de acuerdo con el teorema de Bolzano-Weierstres existen a lo menos dos puntos de acumulación α y β. Nosotros demos-

$a_{n+1} \geq a_n$ para todo n, ella se dice por definición sucesión monótona creciente; si contrariamente, para todo n ocurre que $a_{n+1} \leq a_n$ la sucesión se llama monótona decreciente. Si en las desigualdades precedentes se suprime el signo de igualdad las sucesiones pasan a llamarse estrictamente monótonas creciente y decreciente respectivamente.

Teorema 46°.

Toda sucesión monotona creciente acotada superiormente es convergente.

D.

Puesto que la sucesión $[a_n]$ es acotada superiormente ella tendrá una frontera superior M. Tomemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario y un elemento $a_n > M - \varepsilon$, como solamente hay un número finito de elementos de la sucesión menores que a_n, resulta que debe haber una infinidad de elementos de ella encerrados entre $M - \varepsilon$ y M, luego M es punto de acumulación de la sucesión y por ser único, es el límite de ella.

De manera análoga se demuestra el siguiente teorema:

Teorema 47°

Toda sucesión monótona decreciente acotada inferiormente es convergente.

23.- El número e: Para definir este importante número, haremos un estudio de la sucesión:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Desarrollando a_n de acuerdo con la fórmula del binomio se tiene:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+n\frac{1}{n}+\frac{1}{2!}\,\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\dots\dots$$

$$\dots\dots\ \overline{n+1}\ \text{términos}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots\dots$$

$$\dots\dots\ \overline{n+1}\ \text{términos}$$

luego

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots\dots\dots+\frac{1}{n!}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots\dots\dots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

y con mayor razón

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots\dots\dots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}+\dots\dots$$

o sea:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

Esto nos muestra que la sucesión que nos preocupa es acotada superiormente, si logramos demostrar que ella es una sucesión creciente podemos asegurar que ella

tiene un límite finito, numéricamente inferior a tres.

Sea entonces $m>n$, o sea $\frac{m}{n}>1$, de acuerdo con la conocida desigualdad

$$(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha \qquad \text{para } n>1$$

se tiene

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{n}} > 1 + \frac{m}{n}\cdot\frac{1}{m}$$

o sea

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{n}} > 1 + \frac{1}{n}$$

y luego

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

y como $m>n$, queda demostrado que la sucesión es creciente. De aquí entonces que la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es convergente y el número hacia el cual converge lo designaremos con la letra **e**, así el "número e" queda definido por

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Más adelante tendremos oportunidad de demostrar que este número no es racional y que sus primeras cifras son $e = 2,718281.......$

24.- Ejercicios resueltos.- Concluiremos este estudio de las sucesiones viendo a manera de ejercicios algunos teoremas que prestan gran utilidad en la resolución de varias cuestiones tocantes a este tema.

a). Sea $[a_n]$ una sucesión de términos positivos que converge hacia $a>0$, entonces la sucesión $\left[{}^{b}\log a_n\right]$ converge hacia ${}^{b}\log a$.

Para establecer este teorema es suficiente, de acuerdo con la definición de límite, demostrar que a partir de cierto $n>N$ se verifica que

$$-\varepsilon < {}^{b}\log a_n - {}^{b}\log a < \varepsilon$$

Si suponemos para fijar ideas que $b>1$, entonces $b^{\varepsilon}>1$ y $b^{-\varepsilon}<1$ y como $\lim \frac{a_n}{a} = 1$, existirá un N a partir del cual se tendrá

$$b^{-\varepsilon} < \frac{a_n}{a} < b^{\varepsilon}$$

de donde

$$-\varepsilon < {}^{b}\log a_n - {}^{b}\log a < \varepsilon$$

o sea

$$\left|{}^{b}\log a_n - {}^{b}\log a\right| < \varepsilon \qquad \text{para} \quad n > N$$

b). Sean $[a_n]$ y $[b_n]$ son sucesiones que tienden a infinito si la sucesión $[b_n]$ es estrictamente monótona creciente se verifica que:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} \quad \lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

siempre que el límite del segundo miembro exista o sea infinito.

Supongamos primeramente que $(a_{n+1} - a_n)/(b_{n+1} - b_n)$ tienda a un límite finito . En tal caso existirá un entero N tal que si $n > N$.

$$\left| l - \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \right| < \varepsilon$$

o sea

$$l - \varepsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < l + \varepsilon$$

y teniendo en cuenta que $b_{n+1} - b_n > 0$, resulta:

$$(l - \varepsilon)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < (b_{n+1} - b_n)(l + \varepsilon)$$

Ahora reemplazando en esta desigualdad n sucesivamente por: $n+1$, $n+2$, ..., $n+p-1$, se obtiene:

$$(1-\varepsilon)(b_{n+2}-b_{n+1})<a_{n+2}-a_{n+1}<(b_{n+2}-b_{n+1})(1+\varepsilon)$$

$$(1-\varepsilon)(b_{n+3}-b_{n+2})<a_{n+3}-a_{n+2}<(b_{n+3}-b_{n+2})(1+\varepsilon)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(1-\varepsilon)(b_{n+p}-b_{n+p-1})<a_{n+p}-a_{n+p-1}<(b_{n+p}\quad b_{n+p-1})(1+\varepsilon)$$

y sumando queda:

$$(1-\varepsilon)(b_{n+p}-b_n)<a_{n+p}-a_n<(b_{n+p}-b_n)(1+\varepsilon)$$

y luego

$$(1-\varepsilon)\left(1-\frac{b_n}{b_{n+p}}\right)<\frac{a_{n+p}}{b_{n+p}}-\frac{a_n}{b_{n+p}}<1-\frac{b_n}{b_{n+p}}(1+\varepsilon)$$

de donde

$$(1-\varepsilon)\left(1-\frac{b_n}{b_{n+p}}\right)+\frac{a_n}{b_{n+p}}<\frac{a_{n+p}}{b_{n+p}}<\frac{a_n}{b_{n+p}}+\left(1-\frac{b_n}{b_{n+p}}\right)(1+\varepsilon)$$

dejemos ahora **n** fijo, y hagamos tender $n+p$ a infinito, entonces puesto que b_{n+p} tiende a infinito, se tendrá:

$$1-2\varepsilon<\frac{a_m}{b_m}<1+2\varepsilon$$

siendo $n+p = m > N$.

Supongamos ahora que l sea infinito, entonces siendo $G > 0$ un número arbitrario se tendrá:

$$\frac{a_{n+p} - a_n}{b_{n+p} - b_n} > G \qquad \text{para} \quad n > N_1$$

o sea:

$$a_{n+p} - a_n > G\,(b_{n+p} - b_n)$$

y luego

$$\frac{a_{n+p}}{b_{n+p}} > \frac{a_n}{b_{n+p}} + G\left(1 - \frac{b_n}{b_{n+p}}\right)$$

dejemos ahora n fijo y hagamos tender $n+p$ a infinito, entonces

$$\frac{a_m}{b_m} > G - \varepsilon \qquad \text{para } m = n+p > N.$$

c).

Sea la sucesión $[a_n]$ cuyo límite finito o infinito es a. Se pide demostrar que la sucesión

$$\varepsilon_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n}{n}$$

converge al mismo límite.

Tomemos las sucesiones auxiliares:

$$u_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n \qquad y \; v_n = n$$

entonces de acuerdo con el ejercicio anterior se tiene:

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n}$$

o sea

$$\lim \frac{a_1+a_2 + \cdots\cdots + a_n}{n} = \lim \frac{a_{n+1}}{(n+1) - n} = \lim a_{n+1} = a$$

d).

Sea $[a_n]$ una sucesión de términos convergente a un límite $a>0$ (finito o nó). Se pide demostrar que la sucesión $[b_n] = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots\cdots a_n}$ tiende al mismo límite.

Para demostrar este teorema consideremos la sucesión auxiliar $u_n = \log a_n$ con base mayor que uno. De acuerdo con el ejercicio anterior se tiene entonces:

$$\lim \frac{\log a_1 + \log a_2 + \cdots\cdots + \log a_n}{n} = \lim \log a_n = \log a.$$

pero como

$$\frac{\log a_1 + \log a_2 + \cdots\cdots + \log a_n}{n} = \log \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$

resulta

$$\lim \log \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots\cdots a_n} = \log a$$

de donde

$$\lim \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots\cdots a_n} = a$$

e). Sea $[a_n]$ una sucesión de números positivos, tal que $\lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = \ell \neq 0$, finito o nó, entonces $\lim \sqrt[n]{a_n} = \ell$.

En efecto, se tiene:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots\cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_1}{1}}$$

luego

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{a_1}{1} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdots\cdots \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = \ell .$$

De este teorema se desprende inmediatamente que:

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

f). Demostrar la convergencia y calcular el límite de la sucesión $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ con $a_1 = 1$

Los primeros términos de la sucesión son:

$a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{2}{3}$; $a_4 = \frac{3}{5}$, números comprendidos entre $\frac{1}{2}$ y 1. Demostremos que esta propiedad es gene-

ral, supongamos entonces $\frac{1}{2} < a_n < 1$, resulta que:

$$\frac{2}{3} < a_{n+1} \quad \frac{1}{1+a_n} < 1$$

Formemos la diferencia entre dos términos consecutivos, se encuentra:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{1+a_n} - \frac{1}{1+a_{n-1}} = - \frac{a_n - a_{n-1}}{(1+a_n)(1+a_{n-1})}$$

ahora como según se demuestró, a_{n-1} y a_n son mayores que $\frac{1}{2}$ resulta.

$$|a_{n+1} - a_n| < \frac{4}{9} |a_n - a_{n-1}|$$

y razonando de idéntica manera se encuentra:

$$|a_n - a_{n-1}| < \frac{4}{9} |a_{n-1} - a_{n-2}|$$

$$|a_{n-1} - a_{n-2}| < \frac{4}{9} |a_{n-2} - a_{n-3}|$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$|a_3 - a_2| < \frac{4}{9} |a_2 - a_1|$$

de donde multiplicando miembro a miembro resulta:

$$|a_{n+1} - a_n| < \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |a_2 - a_1|$$

y como para un n conveniente, el segundo miembro de esta desigualdad puede ser menor que cualquier número arbitrario, queda demostrada la convergencia de la sucesión. Si designamos con a su límite, del término general se deduce que:

$$a = \frac{1}{1 + a}$$

de donde

$$a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \qquad \text{ya que debe ser } a > 0.$$

g). Demostrar la convergencia de la sucesión

$$a_n = \frac{n!\ e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

Se vé inmediatamente que la sucesión es acotada inferiormente ya que todos sus términos son positivos. Demostraremos ahora que ella es monótona decreciente, pues:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \frac{(n+1)!\ e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}} + \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!\ e^n} < \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}} < 1$$

de aquí entonces que la sucesión tiene un límite finito ≥ 0. Posteriormente veremos que este límite vale $\sqrt{2\pi}$ (fórmula de Wallis) por lo tanto se tiene:

$$\lim \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}}{n!} = \sqrt{2\pi}: \quad \lim \frac{n!\ e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = 1$$

lo que nos indica que para un n grande $n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$

25° Ejercicios propuestos:

1.- Demostrar la convergencia de las sucesiones:

$$a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}}{n}$$

$$b_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots\ldots + \sqrt[n]{n}}{n}$$

$$c_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{1}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \ldots\ldots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$d_n = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}}$$

$$e_n = \frac{1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n}{n^2}$$

$$f_n = \frac{1^2+2^2+3^2 + \ldots\ldots + n^2}{n^3}$$

$$g_n = \frac{1^p+2^p+3^p+ \ldots\ldots + n^p}{n^{p+1}}$$

$$h_n = \frac{L\,1 + L\,2 + \ldots\ldots + L\,n}{n\,L\,n}$$

$$i_n = \frac{1^p+2^p + \ldots\ldots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \qquad p>0$$

$$j_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

$$k_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ \ldots\ldots\ (n+n)}$$

$$l_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(p+1)(p+2)\ \ldots\ldots\ (p+n)}$$

$$m_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$p_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots\ldots + \frac{n}{n^2+n}$$

$$q_n = \frac{(a+b)^p+(a+2b)^p+\ldots\ldots+(a+nb)^p}{np} - \frac{nb^p}{p+1} \; ; \; a,\ b,\ p > 0$$

$$r_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots\ 2n}$$

$$s_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots\ 2n} \sqrt{2n+1}$$

$$t_n = \frac{1}{1\cdot n} + \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{3(n-2)} + \ldots\ldots + \frac{1}{n\cdot 1}$$

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+n}$$

$$v_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

2.- Demostrar la divergencia de las sucesiones:

$$a_n = \frac{3\cdot 5\cdot 7 \ldots\ldots (2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots\ldots 2n}$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$$

3.- Si $\{a_n\}$ es sucesión convergente hacia a, con $a_n > 0$, demostrar que $\left[a_n^b\right]$ converge hacia a^b

4.- Si $[a_n]$ tiende hacia a y $[b_n]$ hacia b, demostrar que $\left[a_n^{b_n}\right]$ tiende hacia a^b.

5.- Si $[a_n]$ es sueesión nula, demostrar que

$b_n^{a_n} - 1$ es también sucesión nula; $b_n > 0$.

6.- Sea $[a_n]$ una sucesión nula con $a_n > -1$; demostrar que la sucesión $[L(1+a_n)]$ también es sucesión nula.

7.- Si $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+b_n)$ y $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}\, b_n}$

con $a_n > 0$ y $b_n > 0$ demostrar que ambas sucesiones son monótonas y tienden hacia el mismo límite.

8.- Si $[a_n]$ converge hacia a y $[b_n]$ hacia b, demostrar que las sucesiones:

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots\ldots+a_nb_n}{n} \quad y \quad \frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots\ldots+a_nb_1}{n}$$

tiende hacia ab.

9.- La sucesión $a_n = \dfrac{a}{1+a_{n-1}}$ tiende hacia la raíz positiva de la ecuación: $x^2+x-a = 0$.

10.- Determinar el límite de la sucesión

$$a_n = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots\ldots}}}$$

11.- Determinar el límite de $a_n = \left[\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right]^n$

12.- Estudiar la sucesión $u_n(a) = n\left[\sqrt[n]{a}-1\right]$ con $a>0$ y diferente de 1.

13.- Demostrar la divergencia de la sucesión

$$a_n = \left[(n+1)^{\frac{1}{n+1}}\,(n+2)^{\frac{1}{n+2}}\,\ldots\ldots\,(n+n)^{\frac{1}{n+1}}\right]$$

14.- Demostrar la convergencia de las sucesiones:

$$a_n = \left[\sqrt{(n+a)(n+b)} - n\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}}$$

$$c_n = \frac{L\,n}{n}$$

$$d_n = \frac{L(1+na)}{n}$$

$$e_n = n\,e^{-na^2}$$

$$f_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$g_n = \cos n \frac{\alpha}{n}$$

$$h_n = \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdots\cdots \cos \frac{\alpha}{2^n}$$

15.- Calcular el valor aproximado de 50! .

- oOo -

C A P I T U L O IV.

FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL.

26.- Definiciones.- Habiendo dado dos variables x e y se dice que ellas son funciones,una de la otra, si se establece una correspondencia biunívoca cualquiera entre los dominios de dichas variables. Dicho de otro modo: si x es una variable cuyo dominio es D, se dice que y es función de x en ese dominio cuando a todo número x de D se hace corresponder un número real y, y solamente uno.

Cómo se vé esta definición no indica nada sobre la ley de coordinación entre los valores de x e y; ella se acostumbra a designar del modo más general por la notación:

$$y = f(x)$$

La ley de coordinación expresada por la característica f, puede establecerse de cuantos modos se quiera y ella puede ser todo lo arbitraria que se desee.De aquí entonces que no debe ceerse que el concepto de función sólo se aplique a quellas variables x e y cuya correspondencia puede expresarse por una formula analítica, el concepto es mucho menos amplio aún.

Una función tal como ha sido definida la llamaremos uniforme con el deseo de insistir en el hecho que a cada valor de x corresponde uno y solamente uno de y. De acuerdo con este concepto la expresión $y^2 = x^2+1$

definirá para nosotros dos funciones de x que serán

$y = +\sqrt{x^2+1}$ e $y = -\sqrt{x^2+1}$.

Las funciones expresables por medio de símbolos matemáticos operacionales se clasifican en explícitas e implícitas según que la relación operacional entre las variables x e y esté dada por una ecuación resuelta o nó respecto de una de las variables.

27.- Funciones crecientes, decrecientes e inversas.- Se dice que una función $y = f(x)$ definida en un intervalo (a,b) es creciente en este intervalo si, siendo x_1 y x_2 dos números cualesquiera de el, la razón

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

es positiva. Análogamente se dice que una función $f(x)$ definida en un intervalo (a,b) es decreciente en este intervalo si, siendo x_1 y x_2 dos números cualesquiera de él, la razón

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

es negativa.

De las precedentes definiciones se desprenden inmediatamente los resultados siguientes:

Si a es una constante, la función $\varphi(x) = f(x) + a$ es creciente o decreciente según lo sea $f(x)$.

Si a es una constante la función $\varphi(x) = a\,f(x)$ es creciente o decreciente lo mismo que $f(x)$ siempre que $a > 0$; pero si $a < 0$ ella será decreciente o creciente según $f(x)$ sea creciente o decreciente.

Si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son dos funciones simultaneamente crecientes o decrecientes, la función $\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ es también creciente o decreciente.

Si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son dos funciones positivas y simultaneamente crecientes o decrecientes, la función $\varphi(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ es también creciente o decreciente.

Precisemos ahora lo que entenderemos por función inversa de una función dada. Sea la función $y = f(x)$ definida en el dominio D_x, designemos con D_y el dominio de la función y.

El simbolismo $y = f(x)$ nos indica que a cada valor x del dominio D_x corresponde uno y solamente un número y del conjunto D_y y como esta correspondencia biunívoca establecida entre los conjuntos D_x y D_y implica la existencia de una correspondencia biunívoca entre los números de los conjuntos D_y y D_x vemos que x podemos definirla como una función de y en el dominio D_y, esta función que designaremos por el simbolismo $x = g(y)$ la llamaremos función inversa de la función $y = f(x)$

Se puede comprender sin dificultad que si $y = f(x)$ es una función uniforme y creciente (decreciente) en un intervalo (a,b) entonces, siendo (c,d) el intervalo de variación de y, existe en (c,d) la función $x = g(y)$ también uniforme y creciente (decreciente).

La existencia y uniformidad de la función inversa es indudable pues ella está implicada, como lo hemos visto, en la existencia misma de la función directa $y = f(x)$. Resta entonces solamente demostrar que ella es creciente (decreciente). Supongamos que $x = g(y)$ no sea creciente, entonces para un par de valores y_1 e y_2 tales que

$$y_1 < y_2$$

se tendrá

$$x_1 \geqslant x_2$$

Ahora no puede ser $x_1 = x_2$ pues entonces $y_1 = y_2$, ni tampoco puede ser $x_1 > x_2$ pues siendo $f(x)$ creciente se tendrá $y_1 > y_2$ lo que es contrario a la hipótesis. Así $x = g(y)$ es creciente

28.- Funciones pares, impares y periódicas.- Sea $f(x)$ una función definida en un cierto dominio D. Supongamos que este dominio sea tal que si x es un punto de él, $(-x)$ también lo sea. Podrá ocurrir entonces que para todo punto x del dominio D se tenga:

$$f(x) = f(-x)$$

en tal caso, nosotros diremos por definición, que la función $f(x)$ es par. Si por el contrario, se tiene:

$$f(x) = -f(-x)$$

la función se dirá impar. Las funciones $f(x) = \cos x$, $f(x) = x^2$ son funciones pares; las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = x^3$ son funciones impares.

Diremos que una función $f(x)$, definida en un dominio D tal que si x es punto de él, $x = ma$ ($m = \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$) también lo es, es función periódica si:

$$f(x) = f(x + a) \qquad \text{con} \quad a \neq 0$$

La cantidad a se llama período de la función. Se puede ver sin dificultad, de acuerdo con esta definición, que si $f(x)$ tiene como período a, también admite como período ma; en efecto:

$$f(x + 2a) = f[(x + a) + a] = f(x + a) = f(x)$$

similarmente se puede demostrar que 3a,4a,5a,.....etc. son períodos. Además:

$$f(x) = f\left[(x - a) + a\right] = f(x - a)$$

lo que nos indica que si a es período, también lo es (-a) y por consiguiente (-2a), (-3a),.......etc.

Si todos los períodos que f(x) admite son múltiplos de un cierto período a, este se dice período primitivo de f(x) o simplemente período de f(x).

Las funciones senx, cosx son funciones periódicas de período 2π, la función tgx es periódica de período π.

Teorema 48 .-

Si las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ admiten como período a, las funciones

$$f_1(x) \pm f_2(x) \; ; \quad f_1(x)\cdot f_2(x) \; ; \quad \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \quad \text{con } f_2(x) \neq 0$$

también admiten el período a.

D.-

Sea $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$

entonces:

$$F(x + a) = f_1(x + a) + f_2(x + a) = f_1(x) + f_2(x) = F(x)$$

Análogamente se demuestran los casos restantes.

Teorema 49 .-

Si el período de la función f(x) es a el periodo de f(kx) es $\frac{a}{k}$ con $k \neq 0$.

D.-

Sea $\varphi(x) = f(kx)$, designando por b el período de $\varphi(x)$ tenemos:

$$\varphi(x + b) = \varphi(x)$$

o bien

$$f\left[k(x + b)\right] = f(kx)$$

pongamos $kx = u$, entonces:

$$f(u + bk) = f(u)$$

lo que nos indica que el período de $f(x)$ es kb, pero como por hipótesis tal período es a, resulta:

$$kb = ma \qquad (m, \text{número entero})$$

de donde:

$$b = m\frac{a}{k}$$

así pues $\frac{a}{k}$ es el período primitivo de la función $\varphi(x)$ es decir de $f(kx)$.

Observación:.

Respecto de los teoremas recién demostrados, es necesario tener presente que si a es el período de $f_1(x)$ y de $f_2(x)$, no cabe inferirse que las funciones:

$$f_1(x) \pm f_2(x) \;;\; f_1(x) \cdot f_2(x) \;; \ldots .\text{etc.}$$

tienen el mismo período primitivo; por lo general tal período es otro. Indicaremos algunos ejemplos como ilustración.

1°.- Las funciones $f_1(x) = 2\operatorname{sen} x$ y $f_2(x) = \cos x$, admiten el período 2π. La función:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = \operatorname{sen} 2x$$

admite como período primitivo π .

2°.- Las funciones $f_1(x) = \operatorname{sen} x$ y $f_2(x) = \cos x$, admiten el período 2π. La función:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

tiene π como período primitivo.

29.- Funciones algebraicas y trascendentales.- Veremos ahora para concluir con este grupo de definiciones, que debe entenderse por: función racional entera, función racional, función irracional, funciones algebraicas y funciones trascendentales.

Una función racional entera no es otra cosa que un polinomio:

$$P(x) = y = a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots\cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

donde los a_i son constantes y n un entero positivo o cero.

Una función racional fraccionaria, o simplemente función racional es el cuociente de dos polinomios, donde el numerador no es divisible por el denominador. Su forma general es:

$$R(x) = y = \frac{a_o + a_1x + \cdots\cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n}{b_o + b_1x + \cdots\cdots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m}$$

Esta expresión envuelve la división por cero para todos los valores de x que anulan el denomina dor. Será necesario entonces que en el dominio de definición de ella, se eceptuen tales puntos. Combiene observar a este respecto que la función racional entera está definida para todos los valores de la variable.

Si en la función interviene alguna raíz, quedando la variable x como cantidad subradical, la función se dice irracional.

Diremos que y es una función algebraica de x cuando ella es solución de una ecuación del tipo:

$$y^n + R_1 y^{n-1} + R_2 y^{n-2} + \cdots\cdots + R_{n-1} y + R_n = 0$$

donde n es entero positivo y los R_i son funciones racionales de x. Evidentemente de acuerdo con lo dicho, no se incluirá en el dominio de definición de la función los puntos en los cuales algún denominador de los R_i se anula.

Es claro que la ecuación precedente puede ponerse también en la forma:

$$P_0 y^n + P_1 y^{n-1} + \cdots\cdots + P_{n-1} y + P_n = 0$$

donde los P_i son polinomios en x; de aquí que esta ecuación puede servir también para la definición de las funciones algebraicas. Las funciones algebraicas incluyen las funciones racionales enteras y las funciones racionales fraccionarias.

Todas las funciones que no sean algebraicas, si existen, las llamaremos funciones trascendentales.

Teorema 50 .-

Las funciones periódicas son trascendentales.

D.-

Sea $f(x)$ una función periódica de período a, si suponemos que ella es algebraica, ella debe satisfacer una ecuación de la forma:

$$P_o(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \cdots\cdots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0$$

así, tomando el valor particular x_o, se tendrá:

$$P_o(x_o)f^n(x_o) + P_1(x_o)f^{n-1}(x_o) + \cdots + P_{n-1}(x_o)f(x_o) + P_n(x_o) = 0$$

y si tomamos ahora x igual a : $x_o + a$; $x_o + 2a, \ldots$ etc, puesto que la función es periódica de período a se podrá escribir:

$$P_o(x_o + a)f^n(x_o) + P_1(x_o + a)f^{n-1}(x_o) + \cdots\cdots + P_{n-1}(x_o + a)f(x_o) + P_n(x_o + a) = 0$$

$$P_o(x_o + 2a)f^{(n)}(x_o) + P_1(x_o + 2a)f^{(n-1)}(x_o) + \cdots\cdots + P_{n-1}(x_o + 2a)f(x_o) + P_n(x_o + 2a) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Así resulta pués que la ecuación en u:

$$P_o(u)f^n(x_o) + P_1(u)f^{n-1}(x_o) + \cdots + P_{n-1}(u)f(x_o) + P_n(u) = 0$$

tiene infinitas soluciones: x_o, $x_o + a$, $x_o + 2a, \ldots\ldots$ lo que es absurdo pues ella es ecuación algebraica de un cierto grado determinado (el grado mayor, de los grados de P_o, $P_1, \ldots P_n$) y por lo tanto tiene un número finito de soluciones.

De aquí que una función periódica no pudiendo ser algebraica es necesariamente trascendental.

Observación.-

Una función puede definirse de modo que ella sea algebraica en un cierto intervalo y trascendental en otro. Así por ejemplo la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para} \quad x > \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x & \text{para} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

es algebraica en el intervalo abierto $(\frac{\pi}{2}, \infty)$ y trascendental en el intervalo cerrado $(0, \frac{\pi}{2})$.

30.- Oscilación de una función.- Si el conjunto de los valores que toma una función $f(x)$ definida en un intervalo (a,b) es acotado, entonces dicho conjunto tiene una frontera superior M y una frontera inferior m. La diferencia $M-m$ se llama oscilación de la función en el intervalo (a,b). Si la función $f(x)$ no es acotada en el intervalo (a,b) se suele decir que su oscilación es infinita.

Si designamos con D la oscilación, se tiene por definición:

$$D = M - m$$

La oscilación de una función es una cantidad escencialmente positiva, salvo el caso en que la función es constante en todo el intervalo de definición, pués en tal situación se tiene $M = m$ y por lo tanto la oscilación es nula.

Teorema 51 .-

La oscilación de una función en un interva

De aquí que una función periódica no pudiendo ser algebraica es necesariamente trascendental.

Observación.-

Una función puede definirse de modo que ella sea algebraica en un cierto intervalo y trascendental en otro. Así por ejemplo la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } x > \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x & \text{para } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

es algebraica en el intervalo abierto $(\frac{\pi}{2}, \infty)$ y trascendental en el intervalo cerrado. $(0,\frac{\pi}{2})$.

30.- Oscilación de una función.- Si el conjunto de los valores que toma una función $f(x)$ definida en un intervalo (a,b) es acotado, entonces dicho conjunto tiene una frontera superior M y una frontera inferior m. La diferencia $M-m$ se llama oscilación de la función en el intervalo (a,b). Si la función $f(x)$ no es acotada en el intervalo (a,b) se suele decir que su oscilación es infinita.

Si designamos con D la oscilación, se tiene por definición:

$$D = M - m$$

La oscilación de una función es una cantidad escencialmente positiva, salvo el caso en que la función es constante en todo el intervalo de definición, pués en tal situación se tiene $M = m$ y por lo tanto la oscilación es nula.

Teorema 51 .-

La oscilación de una función en un interva lo dado es la frontera superior del conjunto de los valores absolutos de las diferencias de valores que puede tomar la función para los diversos puntos de dicho intervalo.

D.-

Sean x_1 y x_2 dos puntos cualesquiera del intervalo, tales que:

$$f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

de aquí resulta:

$$0 \leqslant f(x_1) - f(x_2) \leqslant M - m = D$$

Por otra parte si tomamos un $\varepsilon > 0$ arbitrario, se puede siempre determinar dos números x_1 y x_2 de modo que:

$$f(x_1) > M - \frac{\varepsilon}{2} \qquad y \qquad f(x_2) < m + \frac{\varepsilon}{2}$$

de donde:

$$f(x_1) - f(x_2) > D - \varepsilon$$

Teorema 52 .-

Sea M la frontera superior de la función $f(x)$ definida en el intervalo cerrado (a,b), si este intervalo se divide en dos (a,c) y (c,b) la frontera superior de $f(x)$ será igual a M en uno de ellos y en el otro $\leqslant M$.

Un teorema análogo puede enunciarse para la frontera inferior.

D.-

Sean M_1 y M_2 respectivamente las fronteras superiores de $f(x)$ en (a,c) y (b,c). Supongamos $M_1 > M$; de acuerdo con la definición de M_1 la función

$f(x)$ podrá tomar en (a,c) valores que defieren de M_1 en menos de $\varepsilon = M_1 - M$, o sea mayores que M, esta conducción es absurda luego no puede ser $M_1 > M$.

Por otra parte si M_1 y M_2 son inferiores a M, M, suponiendo $M_1 \geqslant M_2$ en ninguno de los intervalos (a,c) y (c,b) la función superará a M_1 y por lo tanto ella no podrá tomar valores que difieran de M en menos de $M - M_1 = \varepsilon$ y por consiguiente M no podría ser frontera superior del conjunto $f(x)$ en el intervalo (a,b).

Fácilmente se comprende que este teorema se extiende a cualquier número finito de intervalos en que se divida el intervalo (a,b).

Este teorema puede enunciarse también diciendo: Si M_1, M_2, M_3 ......,M_n son las fronteras superiores de una función $f(x)$ en n intervalos contigüos (a,c_1), (c_1,c_2), (c_2,c_3),.......(c_{n-1},b); la frontera superior de $f(x)$ en (a,b) es el mayor de los M_i.

Teorema 53 .-

La oscilación de una función en una parte de un intervalo no puede ser mayor que su oscilación en el intervalo.

D.-

Sea $f(x)$ una función acotada en el intervalo cerrado (a,b), separemos este intervalo en dos (a,c) y (c,b) si M y m, M_1 y m_1 y M_2 y m_2 son las fronteras de $f(x)$ en esos intervalos, se tiene:

$$D = M - m \quad ; \quad D_1 = M_1 - m_1 \quad ; \quad D_2 = M_2 - m_2$$

de las relaciones ya establecidas:

$$M_i \leqslant M \qquad y \qquad m_i \geqslant m \qquad \text{con } i = 1,2.$$

se sigue: $$M_i - m_i \leqslant M - m$$

o sea:

$$D_i \leq D$$

31.- Encaje de intervalos.- Presentaremos ahora un asunto necesario para la demostración de algunas cuestiones referemtes a las fronteras de funciones.

Sea $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n$, una sucesión de intervalos tales que cada uno de ellos está contenido en el anterior y tales que sus longitudes $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n, \ldots$ tiendan a cero cuando n tiende a infinito; diremos que una tal sucesión constituye un encaje de intervalos. Veremos ahora que para toda sucesión de esta naturaleza se verifica el teorema siguiente , conocido con el nombre de principio de encaje.

Teorema 54°.-

Todo encaje de intervalos determina un punto ξ y sólo uno, perteneciente a todos los intervalos y tal que cada vecindad de él está contenida en un número finito de ellos.

D.-

Sea I_n el intervalo (a_n, b_n), puesto que I_n contiene a I_{n+1} se tiene:

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad y \qquad b_n \geq b_{n+1}$$

luego:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots\ldots \leq a_n \leq \ldots$$

y

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots\ldots \geq b_n \geq \ldots$$

La sucesión $[a_n]$ es monótona creciente y cada término de ella es menor que b_1, de aquí entonces que $[a_n]$ converge hacia un límite $\alpha \leq b_1$.

Similarmente la sucesión $[b_n]$ es monótoma decreciente y cada término de ella es mayor que a_1, luego $[b_n]$ converge hacia un límite $\beta \geqslant a_1$

Si nosotros logramos demostrar que $\alpha = \beta$ tendremos probada la existencia de un punto único .

De acuerdo con lo precedente tenemos:

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{para} \quad n > N_1$$

y

$$|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{para} \quad n > N_2$$

además puesto que la longitud I_n tiende a cero cuando n tiende a infinito, será:

$$|a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{para} \quad > N_3$$

Ahora:

$$|\alpha - \beta| = |\alpha - a_n + a_n - b_n + b_n - \beta|$$

de donde:

$$|\alpha - \beta| \leqslant |\alpha - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - \beta|$$

$$|\alpha - \beta| < \varepsilon \qquad \text{para} \quad n > N$$

siendo N el mayor de los N_1, N_2, N_3.

Pero puesto que α y β son independientes de n, resulta que α y β coinciden, o sea que existe el punto único $\xi = \alpha = \beta$.

Se comprende también sin dificultad que se puede elegir un número positivo h, tal que la vecindad $(\xi - h, \xi + h)$ contenga estrictamente el intervalo I_n y por consiguiente I_{n+1} , I_{n+2} ....etc.; además por pequeña que se tome una cantidad h, existe un valor de n para el cual la longitud de I_n es lo suficientemente pequeña para que I_n esté contenido en la vecindad ($\xi - h$, $\xi + h$). De aquí entonces que cada vecindad de ξ está contenida en un número finito de intervalos I_i.

Teorema 55 .-

Dada una función f(x) de frontera M en el intervalo cerrado (a,b), existe en dicho intervalo a lo menos un punto ξ, tal que en todo entorno de él la frontera superior de f(x) es también M.

D.-

Dimidiemos el intervalo (a,b) por medio de un punto c_1; M será entonces frontera superior de f(x) en uno al menos de los intervalos (a,c_1), (c_1,b). Supongamos que tal cosa ocurra en (a,c_1), dimidiando este intervalo por un punto c_2, en uno al menos de los intervalos (a,c_2), (c_2,c_1) tendrá f(x) al número M como frontera superior; sea por ejemplo en (c_2,c_1), dimidiando este intervalo y continuando así sucesivamente se obtiene un encaje de intervalos.

$$(a,b)\ ;\ (a_1,c_1)\ ;\ (c_2,c_1);\ldots\ldots$$

encaje que de acuerdo con el teorema precedente determina un número único ξ. Este punto debido a su construcción misma gosa de la propiedad enunciada.

Analogamente se puede demostrar el teorema siguiente:

Teorema 56 .-

Dada una función f(x) de frontera m en el intervalo cerrado (a,b), existe en dicho intervalo a lo menos un punto ξ tal que en todo entorno de él la frontera inferior de f(x) es también m.-

Teorema 57 .-

Consideremos un intervalo (a,b) y un conjunto infinito de segmentos (intervalos) (I), tales que cada punto del intervalo (a,b) pertenezca a alguno de estos segmentos del conjunto (I). Entonces siempre será posible recubrir el intervalo (a,b) mediante un número finito finito de segmentos I' sacados del conjunto infinito (I). (Teorema de Haine-Borel).

D.-

Dividamos el conjunto de los números reales en dos clases A y B de acuerdo con el criterio siguiente: un número x pertenecerá a la clase A cuando $x \leq a$ y también cuando sea posible cubrir el intervalo (a, x), siendo $a < x \leq b$, por un conjunto finito de segmentos del conjunto I. El número x pertenecerá a la clase B cuando $x > b$ y también cuando no sea posible cubrir los puntos del intervalo (a,x) por un número finito de segmentos del conjunto I.

De acuerdo con esta clasificación se comprende sin dificultad que todo número real pertenece a alguna de las clases A o B, que ambas clases no son vacías y finalmente que todo número de la clase A es menor que todo número de la clase B de aquí entonces que, de acuerdo con el Teorema de Dedekink, ella define un número real $\xi =$ (A,B).- Nosotros afirmamos que $\xi = b$, en efecto supongamos $\xi < b$, entonces si I_k es un intervalo del conjunto I que tiene a ξ, se tendrá que siendo ξ un punto interior de I_k habrá en I_k números de ambas clases. De aquí que habrá un número finito de intervalos de I que cubren los puntos de (a, x_A) y si a ellos agregamos el segmento I_k habrá un número finito de intervalos de I que cubren los puntos de (A, x_B), afirmación contraria a la hipótesis, de aquí que no pudiendo tampoco ser $\xi > b$ se tendrá necesariamente que $\xi = b$.

32.- <u>Las funciones elementales</u>.- Se llama generalmente funciones elementales a la función logaritmo ($\log x$), a la función exponencial (a^x) y a las funciones trigonométricas.

Nosotros hemos demostrado en el capítulo primero la existencia de la función $^b\log x$ para todo número real $x>0$ siempre que $b>0$ sea diferente de uno. Igual cosa hicimos con la función a^x cuya existencia y unicidad quedó probada para todo x real siempre que $a>0$ fuera diferente de uno. En cuanto a las funciones trigonométricas ellas se introducen en los cursos de trigonometría apoyándose totalmente en la intuición geométrica. Una definición puramente analítica de estas funciones implica la teoría de la integración y de las series infinitas, de aquí entonces la imposibilidad de una rigurosa presentación de las funciones circulares y sus inversas, a esta altura de nuestro curso donde aún no conocemos dichas teorías. Sin embargo con el propósito de enriquecer las aplicaciones de nuestro estudio, nosotros nos tomaremos el derecho de hacer uso de ellas.

En todas las consideraciones que hagamos en lo sucesivo sobre las funciones circulares supondremos los ángulos medidos en radianes.

Como se sabe las funciones circulares son periódicas de aquí que sus funciones inversas tengàn una infinidad de valores para cada valor de la variable; así las funciones circulares inversas son funciones multiformes. Se puede sin embargo asociar esos valores de manera que se defina una infinidad de funciones uniformes, diferentes entre ellas, tales funciones las llamaremos rama de la función considerada.

Así por ejemplo la función $y = \operatorname{arcsen} x$ definida en el intervalo cerrado $(-1,1)$ es la función inversa de la función $x = \operatorname{sen} y$ definida en el intervalo cerrado $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, pues a cada valor de x en el intervalo $(-1,1)$ corresponde un valor y solamente uno de y perteneciente al intervalo $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ y vice-versa. Nosotros di remos que esta función así definida es una rama de la función arc senx, es su rama principal. En virtud de la periosidad de la función seno se comprende que la función y = arc senx tiene infinitas ramas.

Las funciones circulares inversas pueden definirse rigurosamente desde el punto de vista del Análisis, tal como lo hace, por ejemplo, Hardy en su excelente "Course of Pure Mathematics" comenzando con la función arc tgx, definida por:

$$y = \operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

Nosotros emplearemos frecuentemente gráficos para resumir las propiedades de una función definida analíticamente. La curva representativa de la función es en cierto modo una imagen sumaria de ella, incapaz por supuesto de indicar todo lo dada por su expresión analítica, sin embargo esta imagen es muchas veces un medio poderoso, no solamente para caracterizar una función dada, sino también para adquirir intuitivamente importantes nociones sobre funciones en general. A pesar de ser este un procedimiento nada riguroso, nosotros lo emplearemos, pero sólo como un recurso para aclarar algunos razonamientos demasiado abstractos.

33.- Las funciones hiperbólicas.- Se llama funciones hiperbólicas a las funciones:

$$f_1(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad f_2(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$f_3(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad f_4(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$f_5(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \qquad f_6(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

que llamaremos respectivamente: seno hiperbólico (senhx), coseno hiperbólico (coshx), tangente hiperbólica (tghx), cotagente hiperbólica (cothx), cosecante hiperbólica (cosechx) y secante hiperbólica (sechx). Las funciones hiperbólicas están definidas en el intervalo $(-\infty,\infty)$.

De la definición que hemos dado de las funciones hiperbólicas se desprende inmediatamente que:

$$\operatorname{senh}x \cdot \operatorname{cosech}x = 1$$

$$\cosh x \cdot \operatorname{sech}x = 1$$

$$\operatorname{tgh}x \cdot \coth x = 1$$

$$\operatorname{tgh}x = \frac{\operatorname{senh}x}{\cosh x}$$

Sumando y restando las funciones senhx y coshx se encuentra:

$$e^x = \cosh x + \operatorname{senh}x$$

y

$$e^{-x} = \cosh x - \operatorname{senh}x$$

de donde:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

Se comprende sin dificultad que debido a la existencia de estas cinco relaciones, análogas a las establecidas en la trigonometría, existirá entre las funciones hiperbólicas relaciones análogas a todas las que se conocen en trigonometría plana.

De acuerdo con la definición que hemos dado de la función $y = \operatorname{senh} x$ se vé sin dificultad que a todo valor de x del intervalo $(-\infty, \infty)$ corresponde un valor y solamente uno de y perteneciente al dominio $(-\infty, \infty)$ como además la función $y = \operatorname{senh} x$ es creciente y continua (véase capítulo de continuidad) en el intervalo en que ella está definida, podemos asegurar la existencia de la función inversa que la designaremos po la notación $x =$ área $\operatorname{senh} y$.

Teorema 58°.-

Existe la relación área $\operatorname{senh} x = L(x + \sqrt{x^2 + 1})$

D.-

Sea

$$y = \text{área } \operatorname{senh} x \quad \text{entonces} \quad x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

luego:

$$e^y - \frac{1}{e^y} = 2x$$

o sea

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

de donde

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

es decir

$$y = L(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

lo que demuestra el teorema.

34.- Ejercicios propuestos.-

1°.- Si $f(x) = L\,\frac{1-x}{1+x}$, demostrar que $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$

2°.- Si $f(x) = \frac{1}{1-x}$, demostrar que $f\left\{f\left[f(x)\right]\right\} = x$

3°.- Si $f(x) = \operatorname{senh} x$, demostrar que

$$f\left[L(x + \sqrt{x^2 + 1})\right] = x$$

4°.- Hacer en un mismo sistema de ejes ortogonales las representaciones de las funciones: $y = x$; $y = x^2$; $y = x^3$; $y = x^4$.

5°.- Hacer el gráfico de la función,

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x} & \text{para} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \end{cases}$$

6°.- Hacer el gráfico de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{para} \quad x > 0 \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \\ x + 1 & \text{para} \quad x < 0 \end{cases}$$

7°.- Hacer el gráfico de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{para} \quad x < 0 \\ x & \text{para} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

8°.- Si con el símbolo $[x] = E(x)$ se designa el mayor entero contenido en x; representar las funciones:

$$f(x) = [x] \quad ; \quad f(x) = x - [x] \; ; \; f(x) = \sqrt{x - [x]}$$

9°.- Si $f(x)$ es un polinomio, demostrar que $f(a)$ es el resto que resulta de dividir $f(x)$ por $x-a$.

10.- Si $f(x)$ es una función racional entera que se anula para $x = a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n$, demostrar que $(x - a_1)(x - a_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(x - a_n)$ es factor de $f(x)$.

11°.- Un polinomio $f(x)$ de grado n se anula nada más que para n valores de x.

12°.- Demostrar que una ecuación de grado n no puede tener más de n raíces.

13°.- Si para más de n valores de x, se tiene que:

$$ax^n+bx^{n-1}+\cdots\cdots+hx+k = a'x^n+b'x^{n-1}+\cdots\cdots+h'x + k'$$

entonces los polinomios del primer y segundo miembro son idénticos.-

14°.-Hacer el gráfico de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para} \quad x > 0 \\ -2x & \text{para} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

15°.- Construir la curva cuya ecuación es

$$\text{arc sen} x = \text{arc sen} y$$

16°.- Demostrar que el polinomio $P(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n + 1$ es divisible por $(x-1)^2$.

17°.- Calcular el valor numérico de la expreción:

$$y = \sqrt{5 + \sqrt{13 + \sqrt{5 + \sqrt{13 + \cdots\cdots\cdots}}}}\cdots\cdots$$

18°.- Resolver la ecuación: $\text{arc tg} 2x = \frac{\pi}{4} - \text{arc tg} x$

19°.- Si a, b, c,....., p, q son números positivos diferentes de la unidad, demostrar que se tiene:

$$^a\log b \cdot {}^b\log c \cdots\cdots\cdots\cdots {}^p\log q \cdot {}^q\log a = 1$$

20º.- Hacer la representación de la función:

$$f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$$

21°.-Si la función $y = f(x)$ es creciente demostrar que la función $\frac{1}{f(x)}$ es decreciente, que la fun- $[f(x)]^2$ es creciente o decreciente según que $f(x)$ sea positiva o negativa y finalmente que la función $[f(x)]^3$ es creciente.

22°.- Si $y = f(u)$ es una función creciente de u y $u = \varphi(x)$ es una función decreciente de x, demostrar que y es función creciente de x.

23°.- Si $y = f(u)$ es una función decreciente de u y $u = \varphi(x)$ es una función creciente de x, demostrar que y es función decreciente de x.

24°.- Indicar si la función (Función de Dirichlet)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \text{ racional} \\ 0 & \text{para } x \text{ irracional} \end{cases}$$

es creciente o decreciente -¿Son aplicables las definiciones correspondientes?

25°.- Demostrar que si las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ verifican la relación

$$f(x) + f(y) = 2\, f(\frac{x+y}{2})$$

también la verifica la función $F(x) = \varphi(x) + \psi(x)$

26°.- Demostrar que si la función $f(x)$ verifica la relación

$$f(x) + f(y) = 2\, f(\frac{x + y}{2})$$

y además ella se anula para $x = a$ y para $x = b$, entonces ella es nula para todo x.

27°.- Establecer las relaciones:

$$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \operatorname{tgh}^2 x \qquad y \qquad \operatorname{senh} x = \frac{\operatorname{tgh} x}{1 - \operatorname{tgh}^2 x}$$

28°.- Demostrar que las funciones, $\operatorname{senh} x$, y $\operatorname{tgh} x$ son funciones impares mientras que la función $\cosh x$ es par.

29°.- Establecer las relaciones:

$$\operatorname{senh}(x - y) = \operatorname{senh} x \cosh y - \operatorname{senh} y \cosh x$$

y

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

30°.- Establecer las relaciones

$$\operatorname{senh} x = \frac{\cosh 2x - 1}{2} \quad y \quad \cosh x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$

31°.- Representar gráficamente las funciones $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$, y $\operatorname{tgh} x$.-

32°.- Demostrar que la función $y = \operatorname{senh} x$ es creciente para todo número real.-

33°.- Idem para la función $y = \operatorname{tgh} x$.-

34°.- Demostrar que la función $y = \cosh x$ es creciente en el intervalo $(0, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.

35°.- Hacer ver la posibilidad de existencia de la función que se designa con el símbolo $y = \text{área}\cosh x$ y demostrar que:

$$\text{área}\cosh x = \pm L(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

36°.- Idem para la función que se designa con el simbolismo $y = \text{área}\,\text{tgh}\, x$.

- oOo -

C A P I T U L O V.

LIMITES DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL.

35.- Definición.- Vamos a extender en esta ocación la noción límite de una sucesión, o sea de funciones de variable entera, a funciones de una variable contínua.

Sea $f(x)$ una función uniforme definida en un dominio D y sea:

$$[a_n] = a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n, \ldots.$$

una sucesión cualquiera de puntos del dominio D, tal que:

$\lim a_n = a$, siendo a finito, o infinito, pero

$a_n \neq a$, si la sucesión:

$$[f(a_n)] = f(a_1),\ f(a_2),\ f(a_3), \ldots..$$

tiene un límite l, finito o infinito, siempre el mismo, cualquiera que sea la sucesión a_n elegida, nosotros diremos que l es el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende hacia a. Esto lo expresaremos brevemente poniendo:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Si para alguna sucesión $[a_n]$ no existe el límite de la sucesión $[f(a_n)]$, diremos que la función

$f(x)$ no tiene límite para $x = a$, o mejor dicho cuando x tiende hacia a.-

Puesto que la sucesión $[f(a_n)]$ debe tener como límite a l cualquiera que sea la sucesión $[a_n]$, se concluye que si tomamos dos sucesiones:

$$a_n = a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a'_n = a'_1, a'_2, a'_3, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

en el dominio D tales que $[a_n] \to a$ y $[a'_n] \to a'$, si ocurre que:

$$\lim_{a_n \to a} f(a_n) \neq \lim_{a'_n \to a} f(a'_n)$$

se comprende, de acuerdo con la definición dada, que la función $f(x)$ no tiene límite cuando x tiende hacia a.

En algunos casos la sucesión $[a_n]$ se suele restringir de modo que sólo se consideran para a_n valores situados a la derecha de a (mayores que a) en tal caso se habla de límite por la derecha de $f(x)$, o bien límite superior de $f(x)$, empleándose alguna de las notaciones siguientes:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = l \quad ; \qquad f(x+0) = l_1$$

Análogamente si se restringe $[a_n]$ de modo que sólo se consideran para a_n valores situados a la izquierda de a (menores que a) se habla de límite por la izquierda de $f(x)$, o bien límite inferior de $f(x)$, poniéndose:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = l_2 \quad ; \qquad f(x-0) = l_2$$

Se comprende que si se tiene:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

deberá verificarse que:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = l = \lim_{x \to a-0} f(x)$$

e inversamente la existencia de estas dos últimas igualdades implica la existencia de la precedente a ellas.

Presentaremos a continuación un teorema que nos permitirá enunciar otra forma más conveniente de la definición de límite de una función, forma mucho más cómoda para la demostración de las diferentes cuestiones que se suelen presentar.

Teorema 59 .- Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$, dado arbitrariamente un número $\varepsilon > 0$ se puede determinar siempre un número $\eta > 0$, dependiente de ε, tal que para:

$$0 < |x - a| < \eta \quad \text{se tiene} \quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

D.- Sea entonces la función $y = f(x)$ definida en un intervalo cerrado que contiene el punto $x = a$.

Si dado $\varepsilon > 0$ no existe η de modo que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para $0 < |x - a| < \eta$, en todo intervalo $(a - \mu, a + \mu)$ habrá a lo menos un $x \neq a$ (sea x_μ), tal que:

$$f(x_\mu) - l \geqslant \varepsilon$$

Sea $\mu_1, \mu_2, \dots\dots\dots, \mu_n, \dots\dots$ una sucesión convergente a cero y de modo que los $(a - \mu_i, a + \mu_i)$

estén todos dentro del intervalo en que está definida la función $f(x)$. Formemos la sucesión de intervalos:

$$(a-\mu_1, a+\mu_1),\ (a-\mu_2, a+\mu_2),\ \ldots\ldots$$

y como μ_n converge a cero, $[a-\mu_n]$ y $[a+\mu_n]$ convergen ambas hacia a y por consiguiente otro tanto ocurre con la sucesión:

$$x_{\mu_1},\ x_{\mu_2},\ x_{\mu_3},\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ x_{\mu_n},\ \ldots\ldots\ldots$$

y como:

$$|f(x_{\mu_i}) - l| \geq \varepsilon$$

la sucesión $\left[f(x_{\mu_i})\right]$ no converge a l, lo que que es contrario a la hipótesis.

De acuerdo con este teorema enunciaremos la definición de límite de una función en los términos siguiente:

Definición.-

Se dice que una función $f(x)$ tiene un límite l, cuando x tiende hacia a, si dado arbitrariamente un número positivo $\varepsilon > 0$, existe un número $\eta > 0$, dependiente de ε, tal que para:

$$0 < |x - a| < \eta \qquad \text{se tiene} \qquad |f(x) - l| < \varepsilon$$

Es neecesario observar cuidadosamente que la condición: $0 < |x - a| < \eta$ excluye el punto $x = a$ de su consideración, lo que indica la posibilidad de que la función considerada puede no estar definida en ese punto y si lo está no es necesario que se tenga:

$$|f(a) - l| < \varepsilon$$

Si las condiciones indicadas en la definición se verifican para una función $f(x)$, lo expresamos brevemente poniendo:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Al respecto también suele decirse que $f(x)$ converge al límite l cuando x se acerca hacia a. Como ya lo hemos dicho, la variable x puede tender hacia a en algunos casos por valores mayores, en otros por valores menores, así se tienen las expresiones:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = l_1 \quad y \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = l_2$$

Se puede comprender sin dificultad que l_1 y l_2 no tienen porque ser iguales en todos los casos, tampoco es necesario que l_1 o l_2 sea igual a $f(x)$. Hay casos en que estos tres números existen y son iguales. Puede ocurrir también que dos de ellos sean iguales entre si, pero no iguales al tercero. Finalmente puede ocurrir que alguno o todos no existen. La importancia de estas observaciones será comprendida cuando nos preocupemos de la continuidad. De todos modos para mayor comprensión he aquí unos ejemplos referentes a algunas de las observaciones precedentes.

Sea la función: $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{-\frac{1}{x}}}$; se encuentra para ella

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = +1$$

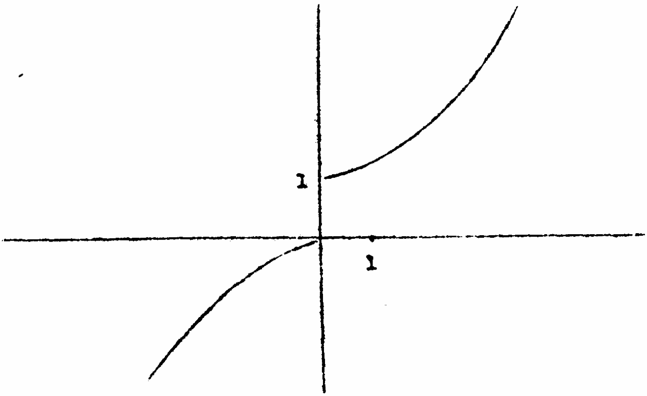


Fig. 1.

Mientras que $f(0)$ no existe por no estar definida la división por cero.

Sea la función $f(x) = \cos \frac{1}{x}$; se tiene para ella:

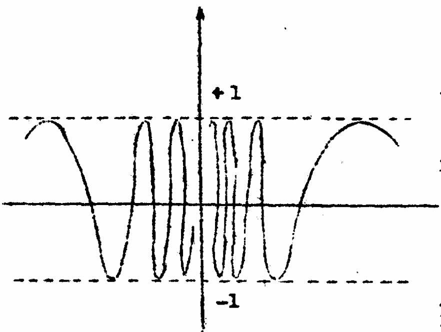


Fig. 2

$\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) =$ no existe

$\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) =$ no existe

$f(0) =$ no existe

ya que al tender $x \to 0$, $\frac{1}{x}$ tiende a infinito ($\pm \infty$) y por ende la función $f(x)$ oscila constantemente entre -1 y $+1$.

Si $f(x)$ no se acerca a un límite definido l cuando $x \to a$ puede ocurrir que diverja hacia $+\infty$ o hacia $-\infty$. Esto puede expresarse formalmente más o menos así:

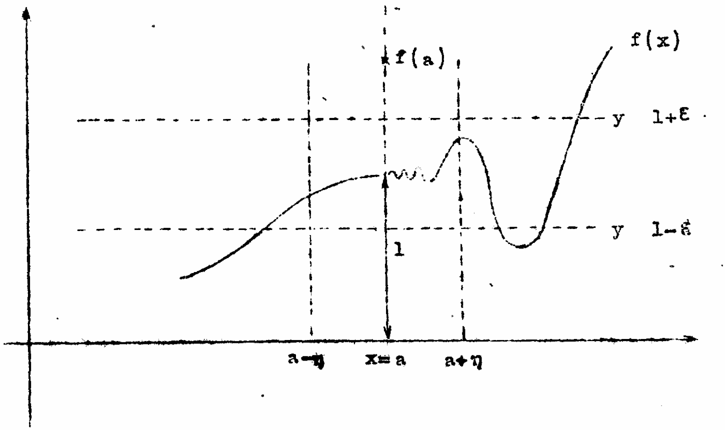
Si dado un número positivo arbitrario A, se puede determinar un número $\eta(A) > 0$ tal que para:

$$0 < |x - a| < \eta \qquad \text{ocurra que} \qquad f(x) > A$$

nosotros diremos que: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

De una manera similar puede darse la definición formal de divergencia hacia $-\infty$.

38.- Interpretación gráfica de la definición de límite.-



En la figura se ha representado una función $y = f(x)$ en un cierto intervalo. Se ha marcado el punto $x = a$ en el cual se tiene que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

ya que como se observa para el número $\varepsilon > 0$ tomado, existe el correspondiente número η tal que:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \qquad \text{para} \quad 0 < |x - a| < \eta$$

Se vé también que $f(a) \neq l$. Además se tiene que para $x = a$ no se cumple $|f(x) - l| < \varepsilon$

37 .- Teoremas sobre límites de funciones.- Veremos ahora un grupo de teoremas sobre límites de funciones, teoremas análogos a los establecidos para las sucesiones y que serán de gran utilidad en numerosas oportunidades.

Teorema 60 .-

Una función $f(x)$ no puede tener más de un límite para un mismo punto $x = a$.

D.-

Supongamos que la función $f(x)$ tenga para $x = a$ dos límites diferentes $l_1 > l_2$; entonces tomando un $\varepsilon > 0$ arbitrario; existirá

$$|f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad |f(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para } 0 < |x - a| < \eta$$

Ahora

$$|l_1 - l_2| = |f(x) - l_2 + l_1 - f(x)| \leqslant |f(x) - l_2| + |l_1 - f(x)|$$

o sea

$$|l_1 - l_2| < \varepsilon$$

lo que es contrario a la hipótesis.

Teorema 61 .-

Si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ tienen el mismo límite l cuando x tiende hacia a y si para todo x de una vecindad de a se tiene que:

$$f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$$

resulta:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

D.-

Por hipótesis dada un $\varepsilon > 0$ arbitrario, se puede determinar un η_1 tal que:

$$|f_1(x) - l| < \varepsilon \qquad \text{para} \quad 0 < |x - a| < \eta_1$$

y otro η_2 tal que:

$$|f_2(x) - l| < \varepsilon \qquad \text{para} \quad 0 < |x - a| < \eta_2$$

o bien expresando esto mismo de otra manera:

$$l - \varepsilon < f_1(x) < l + \varepsilon \qquad \text{en} \quad 0 < |x - a| < \eta_1$$

$$l - \varepsilon < f_2(x) < l + \varepsilon \qquad \text{en} \quad 0 < |x - a| < \eta_2$$

ahora bien, los entornos o intervalos $(a - \eta_1, a + \eta_1)$ y $(a - \eta_2, a + \eta_2)$ tendrán una parte común $(a - \eta, a + \eta)$ y en todo punto de ella se tendrá

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

o sea:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \qquad \text{para} \quad 0 < |x - a| < \eta$$

Teorema 62 .-

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ resulta que: $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |l|$

D.-

Ya que el límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a es l dado un $\varepsilon > 0$ se podrá determinar un η, tal que:

$$|f(x) - l| \leqslant \varepsilon \qquad \text{para} \quad 0 < |x - a| < \eta$$

pero:

$$\big||f(x)| - |l|\big| < |f(x) - l|$$

luego

$$\big||f(x)| - |l|\big| < \varepsilon \qquad \text{para} \quad 0 < |x - a| < \eta$$

Teorema 62 .-

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ resulta que: $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = kl$ siendo k una constante cualquiera:

D.-

En efecto tomado un número $\varepsilon > 0$, puede determinarse un η tal que:

$$|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{|k|} \qquad \text{para} \quad 0 < |x - a| < \eta$$

de aquí resulta:

$$|kf(x) - kl| < \varepsilon \qquad \text{para} \quad 0 < |x - a| < \eta$$

o sea:

$$\lim_{x \to a} kf(x) = kl$$

Teorema 63 .-

Si $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = 0$ y si en todo punto de un entorno η_2 de a se tiene que $|f_2(x)| < k$, siendo $k > 0$, resulta que:

$$\lim_{x \to a} f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$$

D.-

De acuerdo con la primera hipótesis, cualquiera que sea el número $\varepsilon > 0$ existe siempre un η_1 tal que:

$$|f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{k} \qquad \text{con} \qquad 0 < |x - a| < \eta_1$$

y para la parte común $(\eta - a, \eta + a)$ de los entornos η_1 y η_2 se tendrá:

$$|f_1(x) f_2(x)| < \varepsilon$$

Así:

$$\lim_{x \to a} f_1(x) f_2(x) = 0$$

Teorema 64 .-

El límite de una suma de funciones es igual a la suma de los límites de esas funciones.

H. $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = l_1 \; ; \quad \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = l_2$

T. $\lim\limits_{x \to a} \left[f_1(x) + f_2(x) \right] = l_1 + l_2$

D.-

De acuerdo con la hipótesis tenemos que dado un $\varepsilon > 0$ pueden determinarse dos números η_1 y η_2 mayores que cero y tales que:

$$|f_1(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para} \qquad 0 < |x - a| < \eta_1$$

$$|f_2(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para} \qquad 0 < |x - a| < \eta_2$$

De donde

$$|f_1(x) - l_1| + |f_2(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para } 0 < |x-a| < \eta$$

siendo $(a - \eta, a + \eta)$ la parte común de las vecindades $\eta_1 \cdot \eta_2$. Luego:

$$\left|[f_1(x) + f_2(x)] - |l_1 + l_2|\right| < \varepsilon \quad \text{para } 0 < |x-a| < \eta$$

expresión equivalente a la tésis.

Teorema 65 .-

El límite de un producto de funciones es igual al producto de los límites de esas funciones.

H.- $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = l_1$; $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = l_2$

T.- $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) \cdot f_2(x) = l_1 l_2$

D.-

Es suficiente demostrar que:

$$|f_1(x) f_2(x) - l_1 l_2| < \varepsilon \qquad \text{para } 0 < |x - a| < \eta$$

Tenemos:

$$|f_1(x)f_2(x) - l_1 l_2| = |f_1(x)f_2(x) - l_1 f_2(x) + l_1 f_2(x) - l_1 l_2$$

$$|f_1(x)f_2(x) - l_1 l_2| < |f_1(x)f_2(x) - l_1 f_2(x)| + |l_1 f_2(x) - l_1 l_2|$$

$$|f_1(x)f_2(x) - l_1 l_2| < |f_2(x)| \cdot |f_1(x) - l_1| + |l_1| \cdot |f_2(x) - l_2|$$

Pero puesto que por hipótesis $f_1(x)$ y $f_2(x)$ tienen límite, dado arbitrariamente un $\varepsilon > 0$ pueden determinarse dos números η_1 y η_2 tales que:

$$|f_2(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2|l_1|} \qquad \text{para} \quad 0 < |x-a| < \eta_2$$

de donde $f_2(x) < M$ en $0 < |x - a| < \eta_2$ siendo

$$M = |l_2| + \frac{\varepsilon}{2|l_1|} \quad \text{y} \quad |f_1(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{para } 0 < |x-a| < \eta_1$$

De aquí que para un η contenido en η_1 y en η_2 se tenga:

$$|f_1(x)f_2(x) - l_1 l_2| < M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} + |l_1|\cdot\frac{\varepsilon}{2|l_1|}$$

es decir

$$|f_1(x)f_2(x) - l_1 l_2| < \varepsilon \qquad \text{para} \quad 0 < |x - a| < \eta$$

Teorema 66 .-

El límite de un cuociente de funciones es igual al cuociente de los límites de las funciones siempre que el límite del divisor no sea cero.

H.- $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = l_1$; $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = l_2$; $l_2 \neq 0$

T.- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$

D.-

De acuerdo con los teoremas ya demostrados tenemos:

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to a} f_1(x)\cdot\frac{1}{f_2(x)} = \lim_{x \to a} f_1(x)\cdot\lim_{x \to a}\frac{1}{f_2(x)}$$

de aquí entonces que todo se reduce a demostrar que:

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f_2(x)} = \frac{1}{l_2}$$

Tenemos:

$$\left|\frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{l_2}\right| = \left|\frac{l_2 - f_2(x)}{f_2(x)\cdot l_2}\right| = \frac{|f_2(x) - l_2|}{|f_2(x)|\cdot|l_2|}$$

Por hipótesis existe un número η' tal que:

$$|f_2(x) - l_2| < \frac{|l_2|}{2} \qquad \text{para} \quad 0 < |x - a| < \eta'$$

de modo que $|f_2(x)| < \frac{|l_2|}{2}$ para $0 < |x - a| < \eta'$

Dado también un número $\varepsilon > 0$ existe un $\eta'' > 0$ tal que:

$$|f_2(x) - l_2| < \frac{l_2^2\varepsilon}{2} \qquad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \eta''$$

De aquí que una vecindad η de a contenida en η' y η'' se tenga:

$$\frac{|f_2(x) - l_2|}{|f_2(x)|\cdot|l_2|} < \frac{|f_2(x) - l_2|}{\frac{|l_2|}{2}\cdot|l_2|} < \frac{\frac{l_2^2\,\varepsilon}{2}}{\frac{|l_2|}{2}\cdot|l_2|}$$

o sea:

$$\left|\frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{l_2}\right| = \frac{|f_2(x) - l_2|}{|f_2(x)|\cdot|l_2|} < \varepsilon$$

Observación:-

Se comprende sin dificultad que los teoremas 64° y 65° pueden extenderse a un número finito cualquiera de funciones.

Teorema 67°.-

Sí $\lim\limits_{\varphi(x)\to l} f[\varphi(x)] = f(l)$, entonces

$$\lim_{x \to a} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \to a} \varphi(x)]$$

D.-

Puesto que por hipótesis $f[\varphi(x)] \to f(l)$ cuando $\varphi(x) \to l$, dado un número $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un η' tal que:

$$|f[\varphi(x)] - f(l)| < \varepsilon \qquad \text{para } 0 < |\varphi(x) - l| < \eta' \quad (a)$$

pero para $\varphi(x) \to l$ cuando $x \to a$ es necesario que al número η' corresponda un número η (dependiente de η' y por lo tanto de ε) tal que:

$$|\varphi(x) - l| < \eta' \qquad \text{cuando } 0 < |x - a| < \eta' \qquad (b)$$

Comparando las expresionès (a) y (b), resulta:

$$|f[\varphi(x)] - f(l)| < \varepsilon \qquad \text{para } 0 < |x - a| < \eta$$

o sea:

$$\lim_{x \to a} f[\varphi(x)] = f(l) = f[\lim_{x \to a} \varphi(x)]$$

Corolario.-

De los teoremas precedentemente demostrados se desprende que sí:

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = l_1 , \lim_{x \to a} f_2(x) = l_2, \ldots . \lim_{x \to a} f_n(x) = l_n$$

y si R representa una función racional, se tiene que:

$$\lim_{x \to a} R\, f_1(x), f_2(x), \ldots \ldots f_n(x) = R(l_1, l_2, \ldots l_n)$$

siempre que ninguno de los divisores que contenga R tenga cero por límite cuando x tienda hacia a.

Particularmente si:

$$D(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x)\ldots\ldots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & & \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

y $\lim\limits_{x \to a} f_{ij} = l_{ij}$ $(i,j = 1,2,\ldots\ldots n)$ resulta que:

$$\lim_{x \to a} D(x) = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12}\ldots\ldots\ldots & l_{1n} \\ l_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & & l_{nn} \end{vmatrix}$$

38.- Límite de una función cuando x tiende a infinito.-

Se dice que una función $f(x)$ tiene un límite l cuando x tiende a infinito. Si dado un número arbitrario $\varepsilon > 0$, existe un número positivo A tal que:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \qquad \text{para todo } x > A$$

Cuando estas condiciones son satisfechas nosotros ponemos:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

En forma análoga y sin dificultad se puede expresar la definición de límite de f(x) cuando x tiende a $(-\infty)$.

Los teoremas generales sobre límites, estudiados en los párrafos precedentes, son también aplicables al caso en que x tiende a infinito. En efecto el lector puede, con pequeñas variaciones, modificar las demostraciones de estos teoremas de modo que ellas se ajusten al caso en que x tiende a infinito.

39.- Existencia del límite.-No concluiremos lo referente a los límites de funciones, sin expresar antes un teorema a cerca de la existencia del límite. Consideremos una función f(x) uniforme y acotada en el intervalo (a,b). El teorema mencionado es el siguiente:

Teorema 68°.-

La condición necesaria y suficiente para que la función f(x) tienda a un límite l cuando x tiende hacia a, es que dado arbitrariamente un número $\varepsilon > 0$, exista un número $\eta > 0$ tal que:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

siendo x_1 y x_2 dos valores de x que cumplen la condición:

$$0 < |x_1 - a| < \eta \qquad 0 < |x_2 - a| < \eta$$

La condición es necesaria:

Si f(x) tiende a l cuando x tiende hacia a, dado un número $\varepsilon > 0$ arbitrario, se puede elegir un número η tal que:

$$|l - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad y \quad |l - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

cuando:

$$0 < |x_1 - a| < \eta \quad \text{y} \quad 0 < |x_2 - a| < \eta$$

Ahora:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |[f(x_1) - l] - [l - f(x_2)]| \leq |l - f(x_1)| + + |l - f(x_2)|$$

de donde:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

para:

$$0 < |x_1 - a| < \eta \quad \text{y} \quad 0 < |x_2 - a| < \eta$$

De aquí que la ecuación es necesaria.

La condición es suficiente:

En efecto supongamos que se tenga que:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \text{ para } 0 < |x_1 - a| < \eta \text{ y } 0 < |x_2 - a| < \eta$$

tomemos en la vecindad $(a - \eta, a + \eta)$ una sucesión $\{a_n\}$ que converga hacia $a \neq a_n$. Entonces la sucesión $\{f(a_n)\}$ es una sucesión regular y por consiguiente ella tiene un límite l. O sea que dado un $\varepsilon > 0$ existe un N_1 tal que:

$$|l - f(a_n)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para} \qquad n > N_1$$

Tomemos ahora en la vecindad $(a - \eta, a + \eta)$ una sucesión cualquiera $\{b_n\}$ que converga hacia $a \neq b_n$, entonces:

$$|f(a_n) - f(b_n)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para} \qquad n > N_2$$

y sumando estas dos desigualdades se tiene:

$$|l - f(b_n)| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad n > N$$

siendo N N$_1$ y N$_2$. Ahora puesto que la sucesión $[b_n]$ es una sucesión arbitraria , la relación precedente establece que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 1$$

de acuerdo con la primera definición que dimos sobre el límite de una función.

40.- Límites de algunas funciones.- Nosotros ya hemos visto, en el capítulo de las sucesiones que:

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

Vamos a considerar ahora el límite de la expresión más general $(1 + \frac{1}{x})^x$ cuando x tiende a infinito.Todo número real x está comprendido entre dos enteros n y n+1, o sea que:

$$n \leqslant x < n + 1$$

de donde:

$$\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}$$

y luego:

$$1 + \frac{1}{n} \geqslant 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}$$

y entonces: $$(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > (1 + \frac{1}{x})^x > (1 + \frac{1}{n+1})^n$$

o sea:

$$(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{1}{n})^n > (1 + \frac{1}{x})^x > (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}}$$

pero como:

$$\lim (1 + \frac{1}{n})^{n} = \lim (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} = e$$

y

$$\lim (1 + \frac{1}{n}) = \lim \frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} = 1$$

resulta

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^{x} = e$$

Veamos ahora que ocurre con esta expresión si x tiende a $-\infty$. Poniendo $x = -u$, se tiene que al tender x a $-\infty$, u tiende a $+\infty$ y como:

$$(1 + \frac{1}{x})^{x} = (1 - \frac{1}{u})^{-u} = \left(\frac{u-1}{u}\right)^{-u} = (1 + \frac{1}{u-1})^{u}$$

poniendo $u - 1 = v$, se tiene:

$$(1 + \frac{1}{x})^{x} = (1 + \frac{1}{v})^{v+1} = (1 + \frac{1}{v})^{v}\cdot(1 + \frac{1}{v})$$

y como cuando u tiende a $+\infty$ igual cosa ocurre con v, resulta:

$$\lim_{x\to-\infty} (1 + \frac{1}{x})^{x} = \lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{1}{v})^{v}(1 + \frac{1}{v}) = e$$

Ahora de la expresión:

$$\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^{x} = e$$

poniendo $x = \frac{1}{u}$, se sigue:

$$\lim_{u \to 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e$$

Resumiendo podemos decir que: la expresión $(1 + \frac{1}{x})^x$ tiende a un límite definido, que lo designaremos por e, cuando x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$. La expresión $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ tiende al mismo límite e cuando x tiende a cero por valores que pueden ser positivos o negativos.

Trataremos de calcular ahora el límite de la función:

$$f(x) = \frac{a^x - 1}{x}$$

cuando x tiende a cero.- Supongamos $a > 1$. Poniendo $a^x - 1 = u$ se vé que cuando x tiende a cero igual cosa ocurre con u, por otra parte tomando logaritmo de esta igualdad se obtiene:

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{uLa}{L(1 + u)} = \frac{La}{L(1 + u)^{1/u}}$$

y luego:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{u \to 0} \frac{La}{L(1 + u)^{\frac{1}{u}}} = La$$

Si $0 < a < 1$ poniendo $b = \frac{1}{a}$ resulta $b > 1$

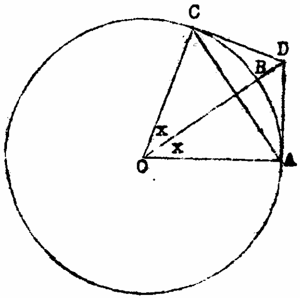
y luego:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = -\lim_{x \to 0} \frac{1}{b^x} \frac{b^x - 1}{x} = -Lb = La$$

Demostraremos ahora que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Tomemos una circunferencia goniométrica y en ella un ángulo x mayor que cero y menor que $\frac{\pi}{4}$ .Determinemos sobre ella un punto C de que: AOC = 2x. Uniendo A con C y trazando en estos puntos las tangentes a la circunferencia hasta su intersección en D, se tiene:



AC < arc ABC < 2AD

en virtud de la definición de longitud de un arco de circunferencia. O sea:

$$2 \operatorname{sen} x < 2x < 2 \operatorname{tg} x$$

y luego

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

de donde:

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$$

y como

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

resulta

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

como la función es impar, la función considerada tiende al mismo límite cuando x tiende a cero por valores negativos.

41.- Ejercicios propuestos.-

1.- Calcular los límites de las funciones siguientes:

$f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ cuando $x \to 0$

$f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ cuando $x \to \infty$

$f(x) = \dfrac{x^n - a^n}{x - a}$ con $n > 0$ entero y cuando $x \to a$

$f(x) = \dfrac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$ cuando $x \to a$

$f(x) = \dfrac{x^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}}}{x - a}$ con $\dfrac{p}{q} > 0$ y cuando $x \to a$

$f(x) = \dfrac{x^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}}}{x^{\frac{r}{s}} - a^{\frac{r}{s}}}$ con $\dfrac{p}{q}$ y $\dfrac{r}{s} > 0$ y cuando $x \to a$

$f(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{x^{m+1} - x^m - x + 1}$ con $m > n > 0$ y cuando $x \to 1$

$f(x) = \dfrac{nx^{n+2} - x^{n+1} - (n+1)x^n + x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$ cuando $x \to 1$

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt[3]{1 - x}}{3x} \qquad \text{cuando} \quad x \to 0$$

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x - 2} + \sqrt[3]{1 - x + x^2}}{x^2 - 1} \qquad \text{cuando } x \to 1$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1} - x \qquad \text{cuando} \quad x \to \infty$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{\sqrt{x^2 + b^2} - b} \qquad \text{cuando} \quad x \to 0$$

2.- Determinar el límite de la función

$$f(x) = x^{\frac{n}{3}}\left[(x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right]$$

cuando x tiende a infinito. Indicar para que valores de n dicho límite será: finito, nulo e infinito.

3.- Calcular los límites de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 - \cot x} \qquad \text{cuando } x \to \frac{\pi}{4}$$

$$f(x) = a^x \operatorname{sen} \frac{b}{a^x} \qquad \text{con } a > 1 \text{ y cuando } x \to \infty$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} px}{\operatorname{sen} qx} \qquad \text{cuando} \quad x \to 0$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a} \qquad \text{cuando} \quad x \to a$$

$$f(x) = \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x} \qquad \text{cuando} \qquad x \to 0$$

$$f(x) = (1 - x)\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x \qquad \text{cuando} \qquad x \to 1$$

$$f(x) = \frac{Lx}{x - 1} \qquad \text{cuando} \qquad x \to 1$$

$$f(x) = \frac{Lx}{x^2 - 1} \qquad \text{cuando} \qquad x \to 1$$

$$f(x) = \sqrt[x]{\frac{a + x}{a - x}} \qquad \text{cuando} \qquad x \to 0$$

$$f(x) = (e^x + x)^{\frac{1}{x}} \qquad \text{cuando} \qquad x \to 0$$

$$f(x) = (1 + \operatorname{sen} x)^{\cot x} \qquad \text{cuando} \qquad x \to 0$$

$$f(x) = x^x \qquad \text{cuando} \qquad x \to 0$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x \qquad \text{cuando} \qquad x \to 0$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} \qquad \text{cuando} \qquad x \to 0$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \qquad \text{cuando} \qquad x \to 0$$

$$f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x} \qquad \text{cuando} \qquad x \to 0$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{1-x}} \qquad \text{cuando} \qquad x \to 1$$

$$f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \qquad \text{cuando} \quad x \longrightarrow 0$$

$$f(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} \qquad \text{cuando} \quad x \longrightarrow 0$$

$$f(x) = \frac{a^x - b^x}{x} \qquad \text{cuando} \quad x \longrightarrow 0$$

$$f(x) = \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x} \qquad \text{cuando} \quad x \longrightarrow 0$$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x} \qquad \text{cuando} \quad x \longrightarrow 0$$

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} \qquad \text{cuando} \quad x \longrightarrow 0$$

4.-Determinar el límite de la función

$$\varphi(x) = \left[1 + \frac{f(x)}{x}\right]^x$$

cuando x tiende a infinito, sabiendo que el límite de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow \infty$ es a.

5.- Determinar el límite de la función

$$\varphi(x) = x\left\{\left[f(x)\right]^{\frac{1}{x}} - 1\right\}$$

cuando x tiende a infinito, sabiendo que el límite de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow \infty$ es $a > 0$.

- oOo -

CAPITULO VI

CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL.

42.- Continuidad.- La noción de continuidad es una consecuencia inmediata del concepto de límite. La clase especial de las llamadas funciones continuas posee numerosas propiedades que no son comunes a todas las funciones. En términos generales la continuidad es la igualdad entre el límite de una función y su valor dado de la variable independiente.

En correspondencia con las definiciones de límites de una función que hemos dado, presentaremos dos definiciones de la noción de continuidad, definiciones que como se comprenderá son equivalentes.

Definición:

La función $f(x)$ se dice continua para $x=a$, si dado un número arbitrario $\varepsilon > 0$, existe un número $\eta(\varepsilon) > 0$ tal que:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad \text{cuando } |x - a| < \eta$$

De acuerdo con ésta definición si la función $f(x)$ es continua en $x = a$, se tiene:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a+0} f(x)$$

En armonía con la primera definición que dimos para el límite de una función, la continuidad puede expresarse también por la definición siguiente:

Definición:

Sea a_n una sucesión cualquiera tal que

$\lim a_n = a$, con $a_n \neq a$. Si la sucesión:

$$[f(a_n)] = f(a_1), f(a_2), f(a_3) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

tiende hacia $f(a)$, finito, cualquiera que sea la sucesión $[a_n]$ elegida, nosotros diremos que la función $f(x)$ es continua en $x = a$.

Finalmente diremos que una función $f(x)$ es continua en un intérvalo cuando (a,b) si es continua para cada valor x en $a<x<b$ y si $f(a+0)$ y $f(b-0)$ existen y son respectivamente iguales a $f(a)$ y $f(b)$.

43.- Teoremas sobre la continuidad de funciones:.

Los teoremas establecidos sobre limite de funciones dan lugar, de acuerdo con la definición de continuidad, a otros tantos teoremas sobre continuidad de funciones. Siendo las demostraciones de estos teoremas análogas a las dadas tratándose de límites de funciones, nos limitaremos aquí a enunciar los teoremas correspondientes.

Teorema 69.

La suma algebraica de un número cualquiera, finito, de funciones continuas en un punto es una función continua en dicho punto.

Teorema 70.

El producto de un número cualquiera, finito, de funciones continuas en un punto es una función continua en dicho punto.

Teorema 71.

El cuociente de dos funciones continuas en un punto es función continua en dicho punto, siempre que la función denominador no se anule en él.

Corolario:

La función recíproca de una función, no nula en un punto es continua en dicho punto.

Teorema 72.-

Sea $y = \varphi(x)$ continúa para $x = a$, con $b = \varphi(a)$ si $f(y)$ es continua para $y = b$, se tiene que $F(x) = f[(x)]$ es función continua para $x = a$. Dicho más brevemente: toda función continua de una función continua es función continua.

Corolario:

Toda función racional de varias funciones continuas en un punto es una función continua en ese punto, siempre que ninguna de las funciones que aparecen como denominadores se anulan en dicho punto.

Teorema 73.

Si $f(x)$ y $\varphi(x)$ son dos funciones continuas en un punto $x = a$ y si $f(a) > 0$, entonces $[f(x)]^{\varphi(x)}$ es continua en $x = a$.

Corolario:

Si $b > 0$ y $f(x)$ es continua en $x = a$, entonces $b^{f(x)}$ es función continua para $x = a$.

Corolario:

Sea $f(x)$ continua y positiva en $x = a$, y b un número cualquiera real, entonces $[f(x)]^{b}$ es función continua para $x = a$.

44.- <u>El concepto de continuidad uniforme</u>.- Al definir la continuidad de una función f(x) en un punto $x = a$, dijimos que ella era continua si, habiendo dado un número arbitrario $\varepsilon > 0$, existía un número η 0 tal que:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad \text{para todo } |x - a| < \eta$$

Se comprende sin dificultad que η depende del valor tomado para ε, observando con más detenimiento se verá también que η depende además del valor de x en el cual se considere la continuidad. Esta última afirmación puede comprenderse con ayuda de la figura 5, donde el valor de ε se ha dejado constante, considerándose enseguida la continuidad en la función en puntos diferentes, tales como: x_1, x_2 y x_3.

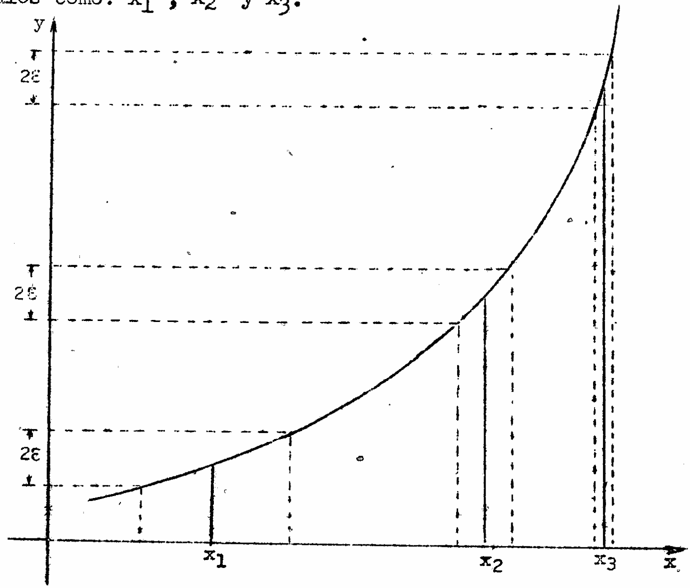


Fig. 5

Ahora si para una función continua es posible encontrar un número η independiente del valor particular de x y que sólo depende del valor del ε elegido diremos que la función es uniformenete continua.

Teniendo presente la definición de oscilación de una función en un intervalo puede decirse que una función $f(x)$ es uniformemente continua en un intervalo (a,b) si dado un número arbitrario $\varepsilon > 0$, existe en correspondencia con él un número $\eta > 0$ tal que en toda segmento de (a,b) de amplitud no superior a η la oscilación de la función es menor que ε.

Terminaremos lo referente a la noción de continuidad uniforme presentando el siguiente teorema:

Teorema 74:

Toda función continua en un intervalo cerrado (a,b) es, en este intervalo, uniformente continua.

D.

Siendo la función $f(x)$ continua por la derecha en el punto $x = a$, tomando un número arbitrario $\varepsilon > 0$, existe un intervalo $(a, a + \eta_a)$ tal que si x_1 y x_2 son dos puntos de este intervalo, se tiene:

$$|f(x_1) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \quad |f(a) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y por lo tanto:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

luego en el intervalo $(a, a + \eta_a)$ la oscilación de la función $f(x)$ es menor que ε. Procediendo de un modo análogo se demuestra que en el intervalo $(b - \eta_b, b)$ la oscilación de $f(x)$ es también menor que ε. Ahora para un punto cualquiera $\bar{x}$ interior en el intervalo $(a + \eta_a, b - \eta_b)$ existe, en virtud de la continuidad de la función, un intervalo $(\bar{x} - \eta_{\bar{x}}, \bar{x} + \eta_{\bar{x}})$, tal que si x_1 y x_2 son dos puntos de él, se tiene:

$$|f(x_1) - f(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |f(\bar{x}) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y luego:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

lo que nos indica que en esos intervalos $(\bar{x} - \eta_{\bar{x}}, \bar{x} + \eta_{\bar{x}})$ la oscilación de $f(x)$ es menor que ε. Se tiene, pues, un conjunto infinito I de intervalos asociados a los puntos de (a,b) y que gozan de la propiedad enunciada. Ahora como estos intervalos satisfacen las condiciones del teorema de Heine-Borel; cada punto interior del intervalo (a,b) es interior de, a lo menos, un intervalo de I y a y b son puntos extremos de a lo menos uno de tales intervalos; podemos afirmar que existe un conjunto I' compuesto de un número finito de intervalos de I que poseen la misma propiedad que I.

Los intervalos que componen el conjunto I' tienen en general partes superpuestas; pero se comprende que los extremos de ellos dividen al intervalo (a,b) en un conjunto finito I" de intervalos en cada uno de los cuales la oscilación de la función $f(x)$ es menor que ε.

Este teorema conocido con el nombre de teorema de la continuidad uniforme, suele a menudo expresarse diciendo:

Teorema 74. Si $f(x)$ es una función continua en el interva lo cerrado (a,b), tomado un número arbitrario $\varepsilon > 0$, existe un número $\eta > 0$ tal que:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \qquad \text{para todo} \quad |x_1 - x_2| < \eta$$

45.- Propiedades de las funciones continuas.- Numerosas e importantes son las propiedades de las funciones continuas, nosotros presentaremos aquí algunas de ellas, por lo menos las de uso más frecuente, o si se quiere, las más necesarias para las demostraciones de cuestiones posteriores.

Teorema 75.-

Si $f(x)$ es continua en $x = a$ con $f(a) \neq 0$, se puede determinar una vecindad de $x = a$, tal que en ella $f(x)$ tenga el mismo signo que $f(a)$.

D.

Siendo por hipótesis $f(x)$ continua en el punto $x = a$, dado un número arbitrario $\varepsilon > 0$, existe un número $\eta > 0$, tal que:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad |x - a| < \eta$$

o bien

$$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon \quad \text{para} \, |x - a| < \eta$$

tomando $\varepsilon = |f(a)|$, lo que es posible ya que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, las desigualdades precedentes se reducen a:

$$f(a) - |f(a)| < f(x) < f(a) + |f(a)| \quad \text{para } x{-}a$$

Supongamos ahora que $f(a) > 0$, resulta entonces:

$$0 < f(x) < 2f(a) \qquad \text{para} \quad |x - a| < \eta$$

o sea que $f(x)$ es positivo para todos los puntos del intervalo $(a - \eta, a + \eta)$.

De una manera análoga, suponiendo $f(a) < 0$, se demuestra que $f(x) < 0$ para todo x del intervalo $(a - \eta, a + \eta)$.

Corolario:

Si $f(x)$ es continua para $x = a$ y si $f(x)$ se anula para valores de x tan cercanos de $x = a$ como se desee o bien toma valores positivos y negativos, entonces $f(a) = 0$.

En efecto si $f(a)$ no fuese cero, ella debería ser ser positiva o negativa y entonces otro tanto tendría que ocurrir en una vecindad de $x = a$, lo que evidentemente es contrario a la hipótesis.

Teorema 76.

Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado (a,b) ella es acotada superior e inferiormente en este intervalo.

D.

Como la función es continua en el intervalo cerrado (a,b), ella es uniformemente continua en dicho intervalo y por consiguiente tomado un número asbitrario $\varepsilon > 0$ se puede dividir el intervalo (a,b) en un cierto número n de subintervalos, tales que, la oscilación de la función en cada uno de ellos sea menor que ε.

Designando con $x_0 = a$, x_1, x_2, x_3, ..., $x_n = b$ los puntos de división del intervalo (a,b) se tendrá de acuerdo con lo dicho que:

$$|f(x) - f(x_k)| < \varepsilon \qquad \text{para} \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k \quad \text{con } k=1,2,\ldots n$$

ahora como:

$$f(x) = f(a)+[f(x_1)-f(a)]+[f(x_2)-f(x_1)] + \dots\dots\dots\dots + [f(x)-f(x_{k-1})]$$

resulta:

$$|f(x)| \leq |f(a)| + |f(x_1)-f(a)| + |f(x_2)-f(x_1)| + \dots\dots + |f(x)-f(x_{k-1})|$$

y luego

$$|f(x)| < |f(a)| + k\varepsilon \qquad \text{y como } k\varepsilon \leq n\varepsilon$$

se tiene:

$$|fa| - n\varepsilon < f(x) < |f(a)| + n\varepsilon$$

Teorema 77.

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado (a,b) existe a lo menos un punto en dicho intervalo, para el cual la función toma como valor su frontera superior, y un punto a lo menos para el cual toma como valor su frontera inferior.

D.

De acuerdo con el teorema anterior, siendo acotado superior e inferiormente el conjunto de los valores que toma $f(x)$ en el intervalo cerrado (a,b), dicho conjunto tendrá una frontera superior M y una frontera inferior m.

Nosotros demostraremos ahora que existe a lo me nos dos puntos x_1 y x_2 en el intervalo (a,b) tales que:

$$f(x_1) = M \qquad y \qquad f(x_2) = m \; .$$

En efecto supongamos que M no fuese alcanzada por f(x) en ningún punto de (a,b), entonces M - f(x) no será nunca nula en el intervalo (a,b) y por lo tanto la funsión:

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

será función continua en (a,b) y por consiguiente acotada.

Designando con M' la frontera superior de la función $\varphi(x)$, se tendrá:

$$\frac{1}{M - f(x)} \leqslant M'$$

o sea:

$$f(x) \leqslant M - \frac{1}{M'}$$

desigualdad que es contradictoria al hecho de ser M la frontera superior f(x) en el intervalo cerrado (a,b). Esta contradicción nos permite asegurar que existe en (a,b) un punto x_1 para el cual se tiene: $f(x_1) = M$.

De modo similar se demuestran que m también es alcanzada por f(x).

Los números M y m se llaman respectivamente máximo absoluto y mínimo absoluto de la función $f(x)$ en el intervalo considerado.

Teorema 78.

Sea $f(x)$ continua en el intervalo cerrado (a,b) y tal que ella toma valores de signos contrarios en dos puntos α y β de dicho intervalo, entonces a lo menos en un punto de (α, β) la función $f(x)$ se anula.

D.

Para fijar las ideas supongamos $f(\alpha)$ positivo y $f(\beta)$ negativo. Ahora por ser $f(x)$ continua hay un intervalo a la derecha de α en el cual $f(x)$ se mantiene positiva, sea γ la frontera superior de este intervalo. No podrá ocurrir que $\gamma = \beta$ debido a que hay un intervalo a la izquierda de β en el cual la función $f(x)$ permanece negativa; de aquí entonces que γ estará entre α y β. Ahora el punto γ es tal que en los puntos situados a su izquierda $f(x)$ es positiva, mientras que en los puntos de un intervalo a su derecha no es positiva; este es suficiente para asegurar que $f(\gamma) = 0$

Corolario:

Toda función continua en un intervalo cerrado (a,b), toma en dicho intervalo todos los valores comprendidos entre su máximo y mínimo absolutos.

En efecto sean α y β los puntos de (a,b) los cuales $f(x)$ toma los valores M y m respectivamente. Sea ahora k un número comprendido entre las fronteras M y m. De acuerdo con esto la función $\varphi(x) = f(x) - k$ es positiva para $x = \alpha$ y negativa para $x = \beta$, de aquí que en algún punto $x = \gamma$ comprendido entre α y β ella se anulará, o sea se tendrá:

$$\varphi(\gamma) = f(x) - k = 0$$

de donde:

$$f(\gamma) = k$$

Siendo γ un punto del intervalo (a,b)

46.- Discontinuidad.- La continuidad de la función $f(x)$ en el punto $x = a$, exige que:

a) Exista $\lim\limits_{a \to a+0} f(x) = l_1$

b) Exista $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = l_2$

c) Que: $l_1 = l_2 = l$

d) Que: $l = f(a)$

De estas condiciones las dos primeras son independientes. La tercera subordinada a las dos primeras y la cuarta a la tercera. Si estas condiciones no son todas satisfechas, la función no es continua en el punto $x = a$, ella se dice en tal caso discontinua en $x = a$.

Examinaremos los casos más importantes de discontinuidad:

1° Puede ocurrir que existan ambos límites $f(a-0)$ y $f(a+0)$ y a lo menos uno de ellos es diferente de $f(a)$. Se dice en este caso que hay una discontinuidad ordinaria o de primera clase. En su mayor generalidad, ella queda expresada cuando:

$$f(a+0) \neq f(a); \qquad f(a-0) \neq f(a); \qquad f(a+0) \neq f(a-0)$$

Si sólo ocurre que:

$$f(a) \neq f(a+0) \qquad \text{mientras que} \quad f(a) = f(a-0)$$

si dice que hay discontinuidad ordinaria por la derecha. Similarmente se define la discontinuidad ordinaria por la izquierda.

Puede suceder también que:

$$f(a+0) = f(a-0) \neq f(a)$$

se dice en este caso que en $x = a$ hay discontinuidad eliminable ya que ella puede hacerse desaparecer con solo cambiar el valor de $f(a)$, por el de $f(a+0) = f(a-0)$.

Particularmente un punto de discontinuidad ordinario se dice regular cuando:

$$f(a) = \frac{f(a+0) + f(a-0)}{2} \quad ;$$

obsérvese que esta igualdad subsiste en todo punto donde $f(x)$ es continua.

2° A lo menos uno de los límites $f(a+0)$, $f(a-0)$ no existe. Se dice en este caso que la función tiene una discontinuidad de segunda clase.

Cuando el límite existente se identifica con $f(a)$, se dice que hay una discontinuidad de segunda clase por la derecha o por la izquierda según que $f(a+0)$ o $f(a-0)$ no exista.

3° Finalmente, para concluir, diremos que si ninguna de las tres expresiones: $f(a-0)$, $f(a)$, $f(a+0)$ existen la función $f(x)$ tiene en $x = a$ una discontinuidad esencial.

He aquí unos ejemplos que ilustran los casos con siderados:

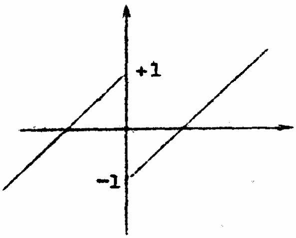


Fig. 6

Sea:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{para } x>0 \\ 0 & \text{para } x=0 \\ x+1 & \text{para } x<0 \end{cases}$$

Esta función presenta una discontinuidad ordinaria de primera especie, ya que:

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = -1 \neq f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = +1 \neq f(0) = 0$$

En esta función se tiene pues:

$$f(0+0) \neq f(0) \neq f(0-0)$$

$$f(0+0) \neq f(0-0)$$

Sea ahora la función

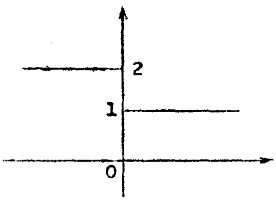


Fig. 7

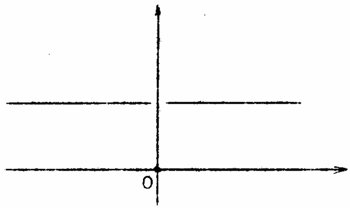
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \geqslant 0 \\ 2 & \text{para } x<0 \end{cases}$$

Se tiene para ella:

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = +1 = f(0) \; ; \; \lim_{x \to 0-0} f(x) = +2 \neq f(0)$$

Se vé que esta función tiene una discontinuidad de primera clase por la izquierda.

Sea la función:



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \\ 1 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

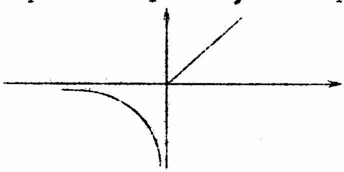
Fig. 8

Esta función tiene en el origen una discontinuidad de primera especie eliminable ya que poniendo $f(0) = 1$ la función pasa a ser continua.

Tomemos la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{para } x < 0 \\ x & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

Ella tiene una discontinuidad de segunda especie por la izquierda, en el punto $x = 0$, ya que:



$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \text{no existe}$$

Fig. 9

La función $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ tiene discontinuidad esencial en el punto $x = 0$.

47.- Continuidad de algunas funciones.- La finalidad de este párrafo es establecer la continuidad de algunas funciones, por lo menos de las que hemos llamado funciones elementales.

Teorema 79 .-
La función $f(x) = a^x$ es continua para todo número x real.

D.-
Supongamos $a \neq 1$ y comenzemos haciendo ver que la función a^x tiende a uno cuando x tiende a cero. Hagamos tender x a cero por valores positivos, entonces cuando x sea menor que uno, existirá un entero positivo n, tal que

$$\frac{1}{n} > x > \frac{1}{n+1}$$

con lo cual la función a^x estará comprendida entre $a^{\frac{1}{n}}$ y $a^{\frac{1}{n+1}}$ sea $a > 1$ o $a < 1$. Ahora al tender x a cero n y $n+1$ tienden a infinito por lo tanto $a^{\frac{1}{n}}$ y $a^{\frac{1}{n+1}}$ tienden a uno y por consiguiente igual cosa ocurre con a^x.

Hagamos ahora tender x a cero por valores negativos, poniendo $= -\bar{x}$, $\bar{x}$ tiende a cero por valores positivos y como $a^x = \frac{1}{a^{\bar{x}}}$ se vé que en este caso a^x también tiende a uno. Resumiendo entonces podemos decir que si $a \neq 1$ la función a^x tiende a uno cuando x tiende a cero sea por valores positivos o negativos.

Establecido ésto tomando un número cualquiera real b , se tiene:

$$a^x - a^b = a^b(a^{x-b} - 1)$$

y cuando x tiende a b , puesto que x - b tiende a cero resulta que:

$$\lim_{x \to b} (a^x - a^b) = 0$$

o sea

$$\lim_{x \to b} a^x = a^b = f(b)$$

La función a^x con a = 1, siendo ella constantemente igual a la unidad, es sin duda continua para todo valor real de x.

Teorema 80 .- La función $f(x) = x^n$ es continua para todo x.

D.- Tomemos un valor determinado de x, sea el valor x = a, nosotros haremos ver que dado número $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un número η tal que:

$$|x^n - a^n| < \varepsilon \qquad \text{para } |x - a| < \eta$$

En efecto, se tiene:

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots\cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

y tomando un número positivo arbitrario δ y un número positivo b mayor que $|a| + \delta$, se tendrá para todos los $|x| \leq |a| + \delta$ que

$$|x^n - a^n| < |x - a|\, nb^{n-1}$$

de donde, si η es menor que el menor de los dos números $\frac{\varepsilon}{nb^{n-1}}$ y δ se tendrá finalmente:

$$|x^n - a^n| < \varepsilon \qquad \text{para } |x - a| < \eta$$

Corolario:-

Toda función racional entera es continua para todo valor de la variable.

Teorema 81 .-

La función $f(x) = {}^{b}\log x$ es continua para todo número x positivo.

D.-

Comenzaremos demostrando que la función es continua para $x = 1$. Supongamos $b > 1$, tomando entonces un número arbitrario $\varepsilon > 0$ se tendrá:

$$|{}^{b}\log x - {}^{b}\log 1| < \varepsilon \qquad \text{para } b^{-\varepsilon} < x < b^{\varepsilon} .$$

y como $b > 1$, se tiene que $b^{-\varepsilon} < 1 < b^{\varepsilon}$, o sea que $1 - b^{-\varepsilon} > 0$ y $b^{\varepsilon} - 1 > 0$. De este modo llamando η al menor de estos dos últimos números, la condición $b^{-\varepsilon} < x < b^{\varepsilon}$ o lo que es lo mismo, la condición

$$b^{-\varepsilon} - 1 < x - 1 < b^{\varepsilon} - 1$$

se transforma en

$$-\eta < x - 1 < \eta \qquad \text{o sea en } |x - 1| < \eta$$

lo que demuestra la continuidad de la función $f(x) = {}^{b}\log x$ en el punto $x = 1$.

Veamos ahora el caso general, bastará demostrar que para todo número $a > 0$, se tiene:

$$\lim_{x \to a} {}^{b}\log x = {}^{b}\log a$$

y esto es inmediato, pués:

$$\lim_{x \to a} {}^{b}\log x = \lim_{x \to a} {}^{b}\log(a \cdot \frac{x}{a}) = \lim_{x \to a} {}^{b}\log a + \lim_{x \to a} {}^{b}\log \frac{x}{a} = {}^{b}\log a$$

ya que la función es continua para $x = 1$

Teorema 82 .-
La función $f(x) = x^a$ es continua para todo $x > 0$.

D.-
La demostración es inmediata, en efecto la función $y = x^a$ puede escribirse también en la forma $y = e^{aLx}$, y como tanto la función exponencial como la función logaritmo son contínuas para todo $x > 0$ resulta de acuerdo con el Teorema 72, que la función $y = e^{aLx} = x^a$ también lo es.

Teorema 83 .-
La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es continua para todo x real.

D.-
Haremos ver que $\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(x + h) = \operatorname{sen} x$. En efecto se tiene que:

$$\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{h}{2}\cos(2x + h)$$

De donde

$$|\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x| \leq 2\left|\operatorname{sen}\frac{h}{2}\right|\left|\cos(2x + h)\right|$$

y puesto que $\cos(2x + h)$ no puede ser en valor absoluto mayor que uno, con mayor razón se tendrá

$$\left|\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x\right| \leq 2\left|\operatorname{sen}\frac{h}{2}\right|$$

y luego

$$\left|\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x\right| \leq h \ \frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

de donde

$$\lim_{h \to 0} \left|\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x\right| = 0$$

o sea

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(x + h) = \operatorname{sen} x$$

Corolario:-

La función $f(x) = \cos x$ es continua para todo x real. En efecto se tiene para todo x que

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Corolario:-

Las funciones circulares directas $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$, $\operatorname{tg} x$ y $\cot x$ son continuas para todos los valores de x para los cuales ellas están definidas, en efecto se tiene:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}; \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Observación.-

La función $y = \operatorname{sen} x$ es continua y creciente en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ de aquí entonces que de acuerdo con lo dicho en el párrafo 27, existe la función inversa $x = \operatorname{arc\,sen} y$ en el intervalo $(-1,1)$. Otro tanto puede decirse de la función $y = \cos x$ en el intervalo $(0,\pi)$ y de la función $y = \operatorname{tg} x$ en el intervalo abierto $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Teorema 84 .-

La función $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$ es continua en el intervalo cerrado $(-1,1)$.

D.-

Comencemos considerando un valor a de la variable independiente comprendido entre -1 y $+1$. Se tiene entonces:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsen} a < \frac{\pi}{2}$$

Tomemos ahora un número $\varepsilon > 0$ tal que:

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \operatorname{arc\,sen} a < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

Trataremos de demostrar que existe un número $\eta > 0$ tal que la doble desigualdad

$$-1 < a - \eta < x < a + \eta < 1$$

implique

$$\operatorname{arc\,sen} a - \varepsilon < \operatorname{arc\,sen} x < \operatorname{arc\,sen} a + \varepsilon$$

En efecto siendo la función $x = \operatorname{sen} y$ creciente en el intervalo $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ estas últimas desigualdades se pueden poner en la forma

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc}\operatorname{sen} a - \varepsilon) < x < \operatorname{sen}(\operatorname{arc}\operatorname{sen} a + \varepsilon)$$

Por otra parte, arc sen $a - \varepsilon$, es menor que arc sen a, y éste a su vez es menor que arc sen $a + \varepsilon$, de aquí entonces que se pueda elegir los números η_1 y η_2 tales que:

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc}\operatorname{sen} a - \varepsilon) = a - \eta_1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\operatorname{arc}\operatorname{sen} a + \varepsilon) = a + \eta_2$$

con lo cual la doble desigualdad precedente se reduce a

$$a - \eta_1 < x < a + \eta_2$$

y ella será verificada sin duda por todos los x tales que

$$a - \eta < x < a + \eta$$

siendo η un número positivo menor que el menor de los η_1 y η_2. Así la función $x = \operatorname{arc}\operatorname{sen} y$ es continua en el punto $x = a$.

Si $a = -1$ el razonamiento precedente prueba que habiendo dado un número arbitrario $\varepsilon > 0$, es posible determinar un número positivo η tal que las desigualdades

$$a < x < a + \eta$$

impliquen

$$\operatorname{arc}\operatorname{sen} a < \operatorname{arc}\operatorname{sen} x < \operatorname{arc}\operatorname{sen} a + \varepsilon$$

Si $a = +1$ el mismo razonamiento prueba que tomado un un número arbitrario $\varepsilon > 0$ existe un número $\eta > 0$ tal que

$$\operatorname{arc}\operatorname{sen} a - \varepsilon < \operatorname{arc}\operatorname{sen} x < \operatorname{src}\operatorname{sen} a$$

para

$$a - \eta < x < a$$

Por consiguiente la función $f(x) = \text{arc sen} x$ es continua también en los puntos $x = 1$ y $x = -1$.

Corolario.-

La función $y = \text{arc cos} x$ es continua en el intervalo cerrado $(-1,1)$, en efecto se tiene que:

$$y = \frac{\pi}{2} - \text{arc sen} x$$

48 .- Ejercicios propuestos.-

1.- Demostrar que la función $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ es continua para todo x positivo.

2.- Demostrar que la función $f(x) = \text{arc tg} x$ es continua para todo x.

3.- Demostrar que si una función $f(x)$ creciente o decreciente en un intervalo (a,b) toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$, ella es continua en dicho intervalo.

4.- Demostrar con ayuda del teorema precedente la continuidad de la función $f(x) = \text{arc sen} x$.

5.- Demostrar que la función $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$ es función continua para todo x positivo.

6.- Determinar cuales son las funciones continuas de una variable, que son finitas para todo valor de la variable y que satisfacen la relación

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

7.- Determinar cuales son las funciones continuas que satisfacen la relación:

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

8.- Determinar las funciones continuas que satisfa ce la relación:

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

9.- Determinar las funciones continuas que satisfa cen la relación:

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

10.-Indicar si la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x = 0 \\ \dfrac{|x|}{x} & \text{para } x \neq 0 \end{cases}$$

es o no continua en $x = 0$.

11.-Demostrar la continuidad de las funciones $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$ y $\operatorname{tgh} x$.

- oOo -

C A P I T U L O VII

DERIVACION DE FUNCIONES EXPLICITAS DE UNA SOLA VARIABLE INDEPENDIENTE.

49.- Derivada.- Sea $y = f(x)$ una función uniforme de x en el intervalo (a,b) y x un punto de este intervalo. Demos a x un incremento $\Delta x = h$, positivo o negativo, el incremento correspondiente de la función será entonces:

$$\Delta y = k = f(x + \Delta x) - f(x)$$

y la razón de ellos:

$$\frac{k}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x.}$$

Si esta función tiende a un límite determinado cuando Δx tiende a cero de una manera cualquiera, este límite se llama derivada de la función $f(x)$ en el punto x. Si $f(x)$ admite una derivada para cada punto del intervalo (a,b), el conjunto de estos valorés constituye el dominio de una nueva función que se representa frecuentemente por alguna de las notaciones siguientes:

$$f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ Df(x),\ \text{etc.}$$

La definición anterior puede ser expresada más brevemente en forma simbólica poniendo:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

o más brevemente aún por:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Debe ser cuidadosamente observado que $\frac{dy}{dx}$ es un símbolo que representa este límite y por lo tanto no debe ser considerado como una fracción.

Conviene observar también que:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} = \frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{x - (x + \Delta x)}$$

y que poniendo $x = c$ y $c + \Delta x = x$, siendo c un punto del intervalo (a,b) en el cual se quiere la derivada de $f(x)$, se tiene una manera muy útil de expresar la derivada de una función $f(x)$ en un punto dado, así:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(c) - f(x)}{c - x}$$

De la definición que hemos dado de derivada se desprende de inmediato el teorema siguiente:

Teorema 85.-

Toda fracción que tiene derivada para un valor dado de x, es contínua en este punto.

H.- $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

T.- $$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$$

D.-

Tomemos la expresión:

$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ de acuerdo con la hipótesis se tiene:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x)$$

donde $\varepsilon(\Delta x)$ es una función de Δx que tiende a cero cuando Δx tiende a cero. Multiplicando por Δx queda:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x \cdot f'(x) + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x)$$

de donde:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) - f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot f'(x) + \lim_{\Delta x \to 0} x \cdot \varepsilon(\Delta x)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x + \Delta x) - \lim_{\Delta x \to 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$$

El recíproco de este teorema no es verdadero, en efecto existen funciones que son contínuas y que no tienen derivadas para valores excepcionales de la variable y aún en todo un intervalo. Analicemos la función

$$y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

Esta función no está definida para x = 0, ella es por tanto discontinua para x = 0. Por otra parte fácilmente puede observarse que:

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

Definamos entonces la función por estudiar de la manera siguiente:

$$y = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{para } x \neq 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

Definida de este modo, la función $y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ ya no es discontinua para x = 0, ella es ahora continua para este punto y sin embargo no admite en él derivada. En efecto la derivada en el punto x = 0 es:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

expresión que no tiene ningún límite ya que oscila constantemente entre (-1) y (+1).

Veamos la función $y = x^{\frac{2}{3}}$ esta función es contínua para todo valor de x y para x = 0 se tiene y = 0, sin embargo la derivada en este punto (0,0) o sea:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{1/3}}$$

crece indefinidamente cuando x tiende a cero. Haciendo la representación gráfica de esta función $y = x^{\frac{2}{3}}$ puede observarse que ella es tangente al eje de las ordenadas (y) en el origen, cuestión que tendrá una fácil comprensión cuando veamos la representación gráfica de la derivada.

Tomemos finalmente la función

$$y = x \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

ella no está definida para $x = 0$. Además se encuentra fácilmente que:

$$\lim_{x \to 0} x \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

luego la función queda definida para todo número real del modo siguiente:

$$y = \begin{cases} x \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{para} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \end{cases}$$

En estas condiciones es continua para $x = 0$. Determinemos el valor de la derivada para dicho punto $(0,0)$, bastará determinar el límite de $\frac{y}{x}$ cuando x tiende a cero ya que:

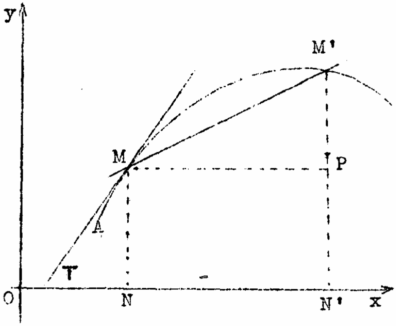
$$\frac{y}{x} = \frac{y - 0}{x - 0} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Tratemos entonces la expresión:

$$\lim_{x \to 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

Cuando x tiende a cero por valores positivos, o por la derecha, como frecuentemente se dice $(0\leftarrow)$, $e^{\frac{1}{x}}$ es positivo y crece hasta ser bastante grande para x suficientemente pequeño, de modo que la razón $\frac{y}{x}$ tiende a la unidad (+1). Contrariamente si x tiende a cero por la izquierda $(\rightarrow 0)$ para x bastante pequeño su valor absoluto $e^{\frac{1}{x}}$ está muy cercano al cero y por lo tanto la razón $\frac{y}{x}$ tiene por límite cero. Existen pués dos valores distintos para el límite según la manera como x tiende a cero. La derivada no existe ya que ella debe ser única. Cuando en adelante se diga que una función f(x) tiene una derivada en el intervalo (a,b) se deberá entender que ella admite una derivada única y finita para cada valor de la variable comprendida entre a y b.

50.- <u>Interpretación geométrica de la derivada</u>.- A la definición analítica de la derivada corresponde una noción geométrica de cierta importancia. El problema de las tangentes a las curvas planas conduce efectivamente a la consideración de la definición de derivada. Veamos a continuación que la determinación de una tangente a una curva plana equivale a la determinación de la derivada de la función gráficamente representada por la curva.



Consideremos una cu curva referida a un sistema de ejes rectangulares y sean x e y las coordenadas de un punto M de ella. Sea y = f(x) la ecuación de esta curva, función que supondremos continua en todo un intervalo (a,b). Cuando x varía de a á b, el punto describe un arco de curva AMB; en estas condiciones se tiene ON = x, NM = y. Incrementemos x en Δx = NN' = MP, se produce así un incremento Δy = PM' de la función f(x). Así se tiene:

$$y = f(x + \Delta x) - f(x) = PM'$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{PM'}{MP} = \operatorname{tg} M'MP$$

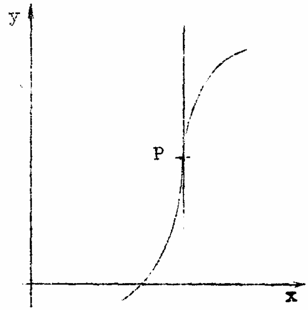
Ahora si el punto M' $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ se aproxima sobre la curva al punto M, Δx se hace cada vez menor, lo mismo que Δy; la secante MM' se aproxima cada vez más a la tangente a la curva de M (de acuerdo con la definición que se dá en geometría, de tangente a una curva y llega a coincidir con ella cuando M' está en M. Pero durante toda esta variación la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ permanece igual a la tangente trigonométrica del ángulo M'MP formada por la secante variable MM' y el eje positivo de las abcisas. En la posición límite dicho ángulo se hace igual al ángulo τ formado por la tangente geométrica a la curva en M y el eje de las x; de modo que:

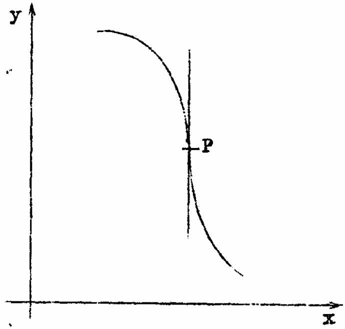
$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \tau$$

Resumiendo: la derivada de una función f(x) en el punto (x,y) es igual al coeficiente angular de la tangente geométrica trazada en dicho punto (x,y) a la curva representativa de la función f(x).

No debe creerse que la derivada de una función sea en si misma una noción geométrica, pués ella ha sido definida en un comienzo en forma puramente analítica, además ella se presta a numerosas otras interpretaciones principalmente en la dinámica.

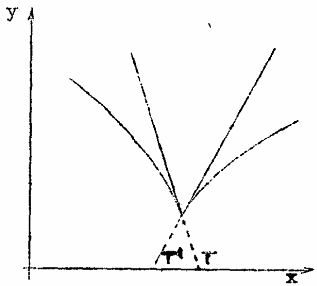
Si se tiene que $f'(x) = \pm \infty$, entonces de acuerdo con la relación $f'(x) = \operatorname{tg} \tau$ resulta que la tangente a la curva es una línea paralela al eje de las ordenadas. Tales casos están representados en las figuras





Un punto tal como P en que la curva corta a su tangente se llama punto de inflexión. El caso en que

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende a valores diferentes y finitos según como la variable independiente tiende al valor x en que la derivada se considera está representado gráficamente en la fig . Un punto de una curva tal como el punto P se llama punto ángular de la curva. Tal punto aparece en el origen para la curva ya conocida $y = x \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ y cuya derivada $x = 0$ vimos que no existía ya que $\lim\limits_{x \quad 0} \frac{y}{x}$



tenía dos valores diferentes 1 y 0 según que x tendiera a cero por valores positivos o negativos respectivamente. Otro ejemplo típico de esta situación la presenta la función:

$$y = \begin{cases} x\dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} & \text{para} \quad x \neq 0 \\[2ex] 0 & \text{para} \quad x = 0 \end{cases}$$

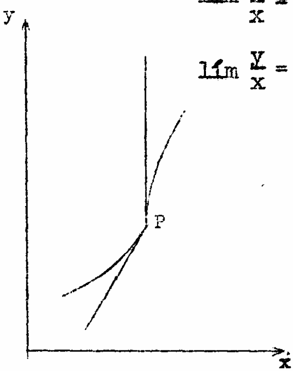
en el punto $x = 0$ ya que:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$$

tiene dos valores diferentes para $x = 0$ según que x tienda a dicho valor por la derecha o por la izquierda, así:

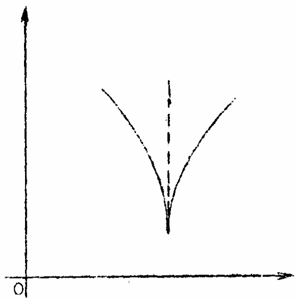
$$\lim \frac{y}{x} = +1 \qquad \text{si } (0 \leftarrow x)$$

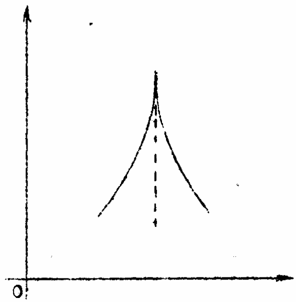
$$\lim \frac{y}{x} = -1 \qquad \text{si } (x \rightarrow 0)$$



-Si uno de los valores es finito y el otro infinito tenemos el caso representado en la fig.

Finalmente si los valores de $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ son infinitos pero de signos opuestos se tienen las representaciones





$f'(x) = -\infty$ si $(x \to x)$ $\qquad$ $f'(x) = +\infty$ $(x \to x)$

$f'(x) = +\infty$ si $(x \leftarrow x)$ $\qquad$ $f'(x) = -\infty$ $(x \leftarrow x)$

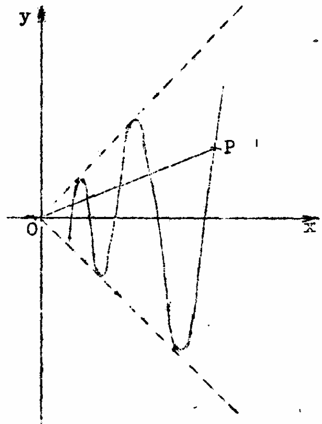
De la observación de estos ejemplos se concluye que puede ocurrir que una curva tenga dos tangentes en un mismo punto de ella.

Ahora vamos a considerar gráficamente algunos ejemplos de funciones contínuas que no tienen derivada para algún punto determinado.

Sea la función f(x) definida del modo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x} & \text{para} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \end{cases}$$

Tratemos de averiguar la representación gráfica de esta función. Puesto que el mayor y el menor valor que puede tomar sen $\frac{\pi}{x}$ cuando x crece indefinidamente son respectivamente (+1) y (-1) no existen puntos de la curva que estén situados fuera de la región del plano comprendida por las rectas $y = x$, $y = -x$. Puesto además que la función sen α es periódica, podemos asegurar que la curva oscila entre dichas dos rectas. La representación más o menos exacta de ella para $x > 0$ es la que se indica en la fig



De acuerdo con la definición, para $x \neq 0$ la función es contínua y para $x = 0$ también lo es puesto que:

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

Una secante cualquiera OP trazada desde el origen a un punto P de la curva oscila entre las dos líneas

$$y = x \qquad e \qquad y = -x$$

cuando el punto P tiende a confundirse con el punto O, avanzando sobre la curva. La secante no tiende a ninguna posición fija cuando P tiende a confundirse con O; de modo que la curva no tiene tangente en el orígen, es decir ella no tiene derivada para $x = 0$. Esta conclusión puede verificarse fácilmente en forma analítica, en efecto

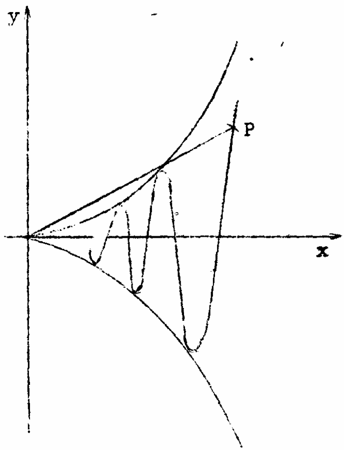
$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$$

expresión que oscila indefinidamente entre (+ 1) y (- 1) cuando x tiende a cero.

Consideremos ahora la función:

$$y = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x} & \text{para } x \neq 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

La función así definida es contínua para todo valor de x, aún para $x = 0$. El gráfico de esta función como fácilmente puede observarse por las razones dadas en el ejemplo anterior, oscila entre las dos siguientes parábolas:



$$y = + x^2 \qquad \text{e}$$

$$y = - x^2$$

Trataremos de averiguar si esta curva tiene una tangente para el punto x $x = 0$. Una secante cualquiera trazada desde O a un punto P oscila entre límites cada vez más extrechos cuando el punto P tiende a confundirse con O. Vemos pués que dicha secante tiende a una posición límite que fácilmente puede comprenderse es el eje de la abscisas. Puede verificarse desde el análisis que este resultado intuitivo a que hemos llegado es correcto. En efecto:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

y como:

$$f'(x) = \operatorname{tg} \tau \text{ , tenemos } f'(0) = \operatorname{tg} \tau \therefore \tau = 0$$

51.- Teoremas que rigen la derivación de funciones de una variable.-

Teorema 86 .-

La derivada del producto de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de de la función.

H.- $F(x) = c \cdot f(x)$, además existe $f'(x)$

T.- $F'(x) = cf'(x)$

D.-

Incrementando:

$$F(x) = c \cdot f(x)$$

$$F(x + \Delta x) = cf(x + \Delta x) \qquad \text{de donde:}$$

$$F(x + \Delta x) - F(x) = c\ f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = c \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

de donde:

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = c \lim_{x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Como por hipótesis $f(x)$ es derivable, existe el límite del segundo miembro de la igualdad anterior, cuando Δx tiende a cero, por lo tanto también existe el límite del primero; luego:

$$F'(x) = c\ f'(x)$$

Teorema 87.-

La derivada de una suma algebraica de un número finito de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones.

$$H.- \quad F(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x);$$

existen $f_1'(x)$, $f_2'(x)$, ...$f_n'(x)$ para un mismo valor de x.

$$T.- \quad F'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots\ldots + f_n'(x)$$

D.-

Incrementando la igualdad de la hipótesis, se tiene:

$$F(x + \Delta x) = f_1(x + \Delta x) + f_2(x + \Delta x) + \ldots + f_n(x + \Delta x)$$

de donde restando:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = f_1(x + \Delta x) - f_1(x) + f_2(x + \Delta x) - f_2(x) + \ldots\ldots + f_n(x + \Delta x) - f_n(x)$$

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{f_1(x + \Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} + \frac{f_2(x + \Delta x) - f_2(x)}{\Delta x} + \ldots\ldots + \frac{f_n'(x + \Delta x) - f_n(x)}{\Delta x}$$

Ya que hemos supuesto que las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ ...... etc. son derivables para un mismo valor de x cada término del segundo miembro de la igualdad anterior tiene un límite cuando Δx tiende a cero; ahora la suma de estos límites es el límite del primer miembro, de modo que:

lím

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{x} = f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) + \ldots + f_n'(x).$$

o bien:

$$F'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) + \ldots + f_n'(x)$$

o empleando otra notación:

$$\frac{d}{dx}\left[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)\right] = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots$$
$$\cdots + f_n'(x).$$

Teorema 88.-

La derivada de un producto de dos funciones es igual a la suma de cada uno de los factores, multiplicados respectivamente por la derivada del otro.

H.- $F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$; existen $f_1'(x)$ y $f_2'(x)$

T.- $F'(x) = f_1(x) \cdot f_2'(x) + f_1'(x) \cdot f_2(x)$.

D.-

Incrementando la igualdad de la hipótesis, se tiene:

$$F(x + \Delta x) = f_1(x + \Delta x) \cdot f_2(x + \Delta x)$$

restando:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = f_1(x + \Delta x) \cdot f_2(x + \Delta x) - f_1(x) \cdot f_2(x)$$

$$F(x + \Delta x) - F(x) = f_1(x + \Delta x) \cdot f_2(x + \Delta x) - f_1(x + \Delta x) f_2(x)$$
$$+ f_1(x + \Delta x) f_2(x) - f_1(x) f_2(x)$$

$$F(x + \Delta x) - F(x) = f_1(x + \Delta x)\left[f_2(x + \Delta x) - f_2(x)\right] +$$
$$+ f_2(x)\left[f_1(x + \Delta x) - f_1(x)\right]$$

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f_1(x + \Delta x)\frac{f_2(x + \Delta x) - f_2(x)}{\Delta x}$$
$$+ f_2(x)\frac{f_1(x + \Delta x) - f_1(x)}{\Delta x}$$

de donde pasando al límite cuando Δx tiende a cero, resulta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f_1(x)f_2'(x) + f_2(x)f_1'(x)$$

es decir

$$F'(x) = f_1(x)f_2'(x) + f_1'(x)f_2(x)$$

Aplicando el mismo procedimiento a la función:

$$F(x) = f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)$$

resulta:

$$F'(x) = f_1'(x)\cdot f_2(x)f_3(x) + f_1(x)f_2'(x)\cdot f_3(x) + f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3'(x)$$

Se puede fácilmente establecer que esta fórmula tiene validez general. En efecto, ya que ella ha sido establecida para dos casos particulares (2 y 3 factores) bastará emplear la inducción completa. Supongamos entonces que ella es válida para un número n de funciones y apóyados en esta suposición demostraremos que entonces también vale para (n + 1) funciones. El propósito estará así alcanzado ya que siendo, la regla, efectivamente válida para el caso de dos factores, lo será en virtud de lo último demóstrado, también para tres, y continuando así sucesivamente ella valdrá cualquiera que sea el número de funciones.

Se tiene entonces:

$$\text{H.-}\quad F_n'(x) = f_1'(x)f_2(x)\cdots\cdots f_n(x) + f_1(x)f_2'(x)\cdots\cdots f_n(x) + \cdots\cdots \cdots\cdot + f_1(x)f_2(x)\cdots\cdots f_n'(x)$$

T.- $$F'_{n+1}(x) = f'_1(x)f_2(x)\cdots\cdots f_n(x)f_{n+1}(x) + \cdots + f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)f'_{n+1}(x)$$

D.-
Tenemos:

$$F_{n+1}(x) = F_n(x)\cdot f_{n+1}(x)$$

Derivando:

$$F'_{n+1}(x) = F'_n(x)f_{n+1}(x)+F_n(x)f'_{n+1}(x)$$

reemplazando $F_n(x)$ y $F'_n(x)$ por sus valores en función de $f_1(x)$, $f_2(x)$.....etc. queda:

$$F'_{n+1}(x) = \Big[f'_1(x)f_2(x)\cdots\cdots f_n(x) + f_1(x)f'_2(x)\cdots\cdots f_n(x) + \cdots\cdots + f_1(x)f_2(x)\cdots\cdots f'_n(x)\Big]\cdot f_{n+1}(x) + f_1(x)f_2(x)\cdots\cdots\cdots\cdots f_n(x)\cdot f'_{n+1}(x)$$

y efectuando la multiplicación indicada:

$$F'_{n+1}(x) = f'_1(x)f_2(x)\cdots\cdots f_n(x)f_{n+1}(x) + f_1(x)f'_2(x)\cdots\cdots\cdots\cdots f_n(x)f_{n+1}(x) + \cdots\cdots + f_1(x)f_2(x)\cdots\cdots\cdots\cdots f'_n(x)f_{n+1}(x) + f_1(x)f_2(x)\cdots\cdots f_n(x)f'_{n+1}(x)$$

lo que dá la tesis propuesta.

Teorema 89.-
La derivada de un cuociente da funciones es igual al denominador por la derivada del numerador, menos

el numerador por la derivada del denominador y todo esto dividido por el cuadrado del denominador.

H.- $F(x)= \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$; $f_2(x) \neq 0$, existen $f_1'(x)$ y $f_2'(x)$

T.- $$F'(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x)-f_1(x)f_2'(x)}{f_2^2(x)}$$

D.-
Incrementando la hipótesis queda:

$$F(x + \Delta x) = \frac{f_1(x + \Delta x)}{f_2(x + \Delta x)}$$ restando con la hipó tesis

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \frac{f_1(x + \Delta x)}{f_2(x + \Delta x)} - \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \frac{f_1(x + \Delta x)f_2(x) - f_2(x + \Delta x)f_1(x)}{f_2(x)f_2(x + \Delta x)}$$

$$F(x + \Delta x) - F(x) =$$

$$= \frac{f_1(x+ \Delta x)f_2(x)-f_1(x)f_2(x)+f_1(x)f_2(x)-f_1(x)f_2(x+ \Delta x)}{f_2(x)f_2(x+ \Delta x)}$$

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{f_2(x)\,\frac{f_1(x+\Delta x)-f_1(x)}{\Delta x}-f_1(x)\frac{f_2(x+\Delta x)-f_2(x)}{\Delta x}}{f_2(x)f_2(x+\Delta x)}$$

De donde pasando al límite cuando Δx tiende a cero; queda:

$$F'(x)=\frac{f_1'(x)f_2(x)-f_1(x)f_2'(x)}{f_2^2(x)}$$

Teorema 90.-

La derivada de una función inversa de una función dada, es igual al valor recíproco de la derivada de la función directa.

H.- Sean $y = f(x)$, $x = g(y)$ funciones inversas, existe $f'(x)$ además $g(y)$ es continua, y $f'(x) \neq 0$.

T.- $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

D.-

Por hipótesis tenemos:

$y = f(x)$ $x = g(y)$

de donde incrementando:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \qquad x + \Delta x = g(y + \Delta y)$$

de donde:

$$\Delta y = f(x + .x) - f(x) \qquad \Delta x = g(y + \Delta y) - g(y)$$

Por otra parte tenemos:

$$g'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y}$$

pero:

$$\frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)}$$

$$\frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Ahora puesto que la función $g(y)$ es continua, lo que indica que si Δy tiende de cero Δx también tiende a cero, tenemos:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

o sea:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Teorema 91.-

Si $y = f(u)$ y $u = \varphi(x)$, la derivada de y respecto de x es igual a la derivada de y respecto de u por la derivada de u respecto de x.

H.- $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ $\therefore$ $F(x) = f\left[\varphi(x)\right]$

existen $y' = f'(u)$ y $u' = \varphi'(x)$

T.- $F'(x) = f'\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)$.

D.-

Tomemos la expresión

$$u = \varphi(x)$$

incrementando

$$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x)$$

restando

$$u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$$

de donde:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x) + \varepsilon_1(\Delta x)$$

donde $\varepsilon_1(\Delta x)$ es alguna función de Δx tal que tiende a cero cuando Δx tiende a cero. Multiplicando la igualdad anterior por Δx queda:

$$\Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \Delta x \cdot \varphi'(x) + \Delta x \cdot \varepsilon_1(\Delta x) \qquad \text{(a)}$$

Por otra parte tomando la expresión:

$$y = f(u)$$

incrementando

$$y + \Delta y = f(u + \Delta u)$$

restando:

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

de donde:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} = f'(u) + \varepsilon_2(\Delta u)$$

donde $\varepsilon_2(\Delta u)$ es una función de Δu tal que tiende a cero con Δu, Multiplicando por Δu, resulta:

$$\Delta y = f(x + \Delta u) - f(u) = \Delta u \cdot f'(u) + \Delta u \cdot \varepsilon_2(\Delta u) \qquad \text{(b)}$$

reemplazando en ésta expresión el valor ya encontrado, en la igualdad (a), para Δu, se tiene:

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) = \left[\Delta x\, \varphi'(x) + \Delta x\, \varepsilon_1(\Delta x)\right] f'(u) +$$

$$+ \left[\Delta x\, \varphi'(x) + \Delta x\, \varepsilon_1(\Delta x)\right] \varepsilon_2(\Delta u) \qquad \text{(c)}$$

Tomemos finalmente la identidad:

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

tomando en cuenta la relación (c') , se puede escribir:

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{[\Delta x\varphi'(x)+\Delta x\varepsilon_1(\Delta x)]f'(\bar{u})+[\Delta x\,\varphi'(x)+\Delta x\varepsilon_1(\Delta x)]\,\varepsilon_2(\Delta u)}{\Delta x}$$

efectuando la división por Δx, en el segundo miembro queda:

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=$$

$$=f'(u)\cdot\varphi'(x)+\varepsilon_1(\Delta x)f'(u)+\varphi'(x)\cdot\varepsilon_2(\Delta u)+\varepsilon_1(\Delta x)\cdot\varepsilon_2(\Delta u)$$

Pasando al límite cuando Δx tiende a cero, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f'(u)\cdot\varphi'(x)$$

o sea:

$$F'(x)=f'[\varphi(x)]\,\varphi'(x)$$

Expresión que también puede ponerse en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

que por supuesto es idéntica a la anterior, salvo la notación.

52.- Derivadas de las funciones elementales: Veremos ahora las derivadas de algunas funciones, de las funciones de uso más frecuente.

Teorema 92.-
La derivada de la función $f(x) = c$, donde c es una constante, es nula.

D.-
Puesto que la función es constante su incremento debe ser nulo, o sea

$$\Delta y = 0 \qquad \text{de donde} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

y luego:

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 .$$

Teorema 93.-
La derivada de la función $f(x) = {}^{a}\log x$ es

$$f'(x) = \frac{1}{x} \; {}^{a}\log e$$

D.-
Sea $f(x) = \log x$

incrementando

$$f(x + \Delta x) = \log(x + \Delta x)$$

de donde

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \log(x + \Delta x) - \log x$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \log \frac{x + \Delta x}{x}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \log \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

luego

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

amplificando por x

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{x} \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

y aprovechando una conocida propiedad de los logaritmos tenemos:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

de donde

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

o sea:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log e \ .$$

En general si se trata de una función compuesta:

$$y = \log u \qquad \text{donde} \qquad u = \varphi(x) > 0$$

de acuerdo con el teorema ya establecido al respecto, pue de anotarse que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'}{u} \log e$$

o bien

$$\frac{d}{dx} (\log u) = \frac{\frac{du}{dx}}{u} \log e \quad .$$

Particularmente si el logaritmo que aparece en la función dada, es natural o neperiano, es decir si

$$f(x) = L\,x \qquad y \qquad y = L\,u \quad \text{siendo} \quad u = \varphi(x)$$

las relaciones anteriores toman las formas siguientes:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(Lu) = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

Observación:

Nótese que en esta demostración se ha postulado que:

$$\lim_{x\to 0} \log\left(1 + \frac{x}{\Delta x}\right)^{\frac{\Delta x}{x}} = \log \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{x}{\Delta x}\right)^{\frac{\Delta x}{x}}$$

Teorema 94.- Si $f(x) = a^x$ siendo $a>0$ entonces $f'(x) = a^x L\, a$.

D.- Tomemos pues

$$f(x) = a^x$$

incrementando

$$f(x + \Delta x) = a^{x + \Delta x}$$

de donde

$$f(x + \Delta x) - f(x) = a^{x + \Delta x} - a^x$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = a^x (a^{\Delta x} - 1)$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

pasando al límite cuando Δx tiende a cero

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Pero sabemos que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = L\ a$$

de donde:

$$f'(x) = a^x L\ a$$

Si se trata de una función de función, es decir si se tiene:

$$y = a^u \qquad \text{y además} \qquad u = \varphi(x)$$

resulta:

$$y'_x = a^u L\ a \cdot u'_x$$

o sea:

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u L\ a \cdot \frac{du}{dx}$$

Particularmente si la función exponencial tiene como base el número e, las relaciones precedentes toman las formas:

$$f'(x) = e^x \qquad\qquad \frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

Teorema 95.-

Si $f(x) = x^a$ cualquiera que sea a entonces $f'(x) = ax^{a-1}$

D.-

Tomemos la función $f(x) = x^a$, de acuerdo con una conocida propiedad de los logarirmos, podemos escribir

$$f(x) = x^a = e^{aLx}$$

de donde derivando

$$f'(x) = e^{aLx} \cdot \frac{a}{x}$$

o sea

$$f'(x) = a\,x^{a-1}$$

Por supuesto que esta demostración es válida cualquiera que sea el número a, pués ella no le impone a él ninguna condición.

En cuanto a x deberá tenerse $x>0$.

Teorema 96.-

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$ entonces $f'(x) = \cos x$.

D.-

Tomemos la función

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

incrementemos:

$$f(x+\Delta x) = \operatorname{sen}(x+\Delta x)$$

restando:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \operatorname{sen}(x+\Delta x) - \operatorname{sen} x$$

aplicando una conocida fórmula de la trigonometría; resulta:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = 2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}$$

luego:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \cos\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

pasando al límite, cuando Δx tiende a cero:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos\frac{2x}{2}$$

de modo que:

$$f'(x) = \cos x$$

En general si $y = \text{sen } u$ y $u = \varphi(x)$, entonces

$$y' = \cos u \cdot u'$$

o bien

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

Teorema 97.-
Si $f(x) = \cos x$, entonces $f'(x) = -\text{sen } x$.

D.-
$$f(x) = \cos x$$

$$f(x + \Delta x) = \cos(x + \Delta x)$$

restando

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

Pero como de acuerdo con la trigonometría

$$\cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\text{sen}\frac{2x + \Delta x}{2} \text{ sen } \frac{\Delta x}{2}$$

luego:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \frac{-2\text{sen } \frac{2x + \Delta x}{2} \text{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -\text{ sen } \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \frac{\text{sen } \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = -\lim_{x \quad 0} \operatorname{sen} \frac{2x+\Delta x}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x$$

Si $y = \cos u$ y $u = \varphi(x)$ entonces:

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\operatorname{sen} u \cdot \frac{du}{dx}$$

Teorema 98.- Si $f(x) = \operatorname{tg} x$ entonces, $f'(x) = \sec^2 x$, para todo x donde la función esté definida.

D.- La función $f(x) = \operatorname{tg} x$, puede escribirse en la forma:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

y derivando

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

en general

$$\frac{d}{dx}(\text{tg}u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

Teorema 99.-
Si $f(x) = \cot x$, entonces $f'(x) = \text{cosec}^2 x$

D.-
La función $f(x) = \cot x$ puede escribirse en la forma

$$f(x) = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}$$

y derivando

$$f'(x) = \frac{-\text{sen}^2 x - \cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = -\frac{1}{\text{sen}^2 x} = -\text{cosec}^2 x$$

por lo tanto:

$$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\text{cosec}^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

Teorema 100.-
Si $f(x) = \sec x$, entonces $f'(x) = \sec x\, \text{tg} x$

D.-

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

de donde

$$f'(x) = \frac{+\text{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \text{tg} x \sec x$$

Por lo tanto si $u = \varphi(x)$, resulta:

$$\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \cdot \text{tg} u \frac{du}{dx}$$

Teorema 101.-

Si $f(x) = \operatorname{cosec} x$, entonces

$$f'(x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

D.-

$$f(x) = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

derivando

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

y en general se tendrá:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$$

siendo $u = \varphi(x)$.

Teorema 102.-

Si $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{+\sqrt{1-x^2}}$

H.- $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$; $-\frac{\pi}{2} < f(x) < +\frac{\pi}{2}$; $x \neq 1$

T.- $f'(x) = \dfrac{1}{+\sqrt{1-x^2}}$

D.-

Conviene observar que la función $f(x)$ está definida sólo para $-1 < x < +1$. Su derivada la determinaremos aplicando el teorema demostrado respecto de las funciones inversas.

De la igualdad

$$f(x) = y = \operatorname{arc\,sen} x$$

se obtiene:

$$x = \operatorname{sen} y$$

de donde

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Ahora este radical debe ser tomado con signo positivo, pués cosy es positivo en el intervalo considerado para y en la hipótesis, de donde:

$$\frac{dx}{dy} = +\sqrt{1 - x^2}$$

Pero de acuerdo con lo demostrado para las funciones inversas, es decir con

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = f'(x)$$

y en general para una función de función:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\ sen} u) = \frac{1}{+\sqrt{1 - u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

Teorema 103.-

Si $f(x) = \operatorname{arc} \cos x$, entonces

$$f'(x) = \frac{-1}{+\sqrt{1 - x^2}} \quad ; \qquad x \neq 1$$

H.- $f(x) = \operatorname{arc} \cos x; \; 0 < f(x) < \pi$;

T.- $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

D.-
Sabemos desde la trigonometría que:

$$\text{arc cos } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc sen } x$$

luego:

$$\frac{d}{dx}(\text{arc cos } x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\pi}{2} - \text{arc sen } x\right]$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc cos } x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{d}{dx}(\text{arc sen } x)$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc cos } x) = -\frac{1}{+\sqrt{1 - x^2}}$$

y en general

$$\frac{d}{dx} \cdot (\text{arc cos } u) = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

Teorema 104.-
Si $f(x) = \text{arc tg } x$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

H.- $f(x) = \text{arc tg } x; \quad -\dfrac{\pi}{2} < f(x) < +\dfrac{\pi}{2}$

T.- $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

D.-

Conviene observar que la función está definida para todo valor real de x. Sea entonces:

$$y = f(x) = \text{arc tg } x$$

de donde:

$$x = \text{tg } y$$

luego:

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y = 1 + \text{tg}^2 y = 1 + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc tg } u) = \frac{1}{1 + u^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

Teorema 165.- Si $f(x) = \text{arc tg } x$, entonces $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

H.- $f(x) = \text{arc cot } x$; $\quad 0 < f(x) < \pi$

T.- $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

D.-

Sabemos que:

$$\text{arc cot } x = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg } x$$

de donde:

$$\frac{d}{dx}(\text{arc cot } x) = -\frac{d}{dx}(\text{arc tg } x)$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc cot } x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

y si $u = \varphi(x)$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc cot } u) = -\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$$

Teorema 106.- Si $f(x) = \text{arc sec } x$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

H.- $f(x) = \text{arc sec } x$; $0 < f(x) < \frac{\pi}{2}$;

$-\pi < f(x) < -\frac{\pi}{2}$.

T.- $f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

D.-

Conviene observar que la función está definida para todo valor de x con excepción de los comprendidos entre (-1) y $(+1)$ y que ella puede tomar una infinidad de valores por lo que hemos de limitar su intervalo de variación.

Tenemos que:

$$\text{arc sec } x = \text{arc cos } \frac{1}{x}$$

luego:

$$\frac{d}{dx}(\text{arc sec } x) = \frac{d}{dx}\left(\text{arc cos } \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc sec } x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc sec } x) = -\frac{}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{arc sec } x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

donde el radical debe ser tomado con su signo positivo, debido a su significado trigonométrico y al intervalo de variación considerado. En general:

$$\frac{d}{dx}(\text{arc sen } u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}} \cdot \frac{du}{dx}$$

Teorema 107.-
Si $f(x) = \text{arc cosec} x$, entonces

$$f'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

D.-
Basta observar que:

$$\text{arc cosec} x = \frac{\pi}{2} - \text{arc sec } x$$

y la demostración es análoga a la precedente.

53.- Derivada de expresiones de la forma $f(x) = [F(x)]^{\varphi(x)}$

Ciertas funciones de funciones presentan una forma bajo la cual su modo de composición no es inmediatamente visible, es necesaria entonces transformarlas antes de derivarlas. Tal es el caso de las funciones u^v y $^u\log v$ en las cuales u y v designan funciones de x. Se comenzará por extresarlas por medio de una base constante, como por ejemplo el número e; se tendrá así:

$$u^v = e^{vLu} \quad ; \qquad {}^u\log v = \frac{Lv}{Lu}$$

y las derivadas de tales funciones se obtienen entonces por medio de las reglas precedentemente dadas. En el primero de los dos casos indicados suele emplearse frecuentemente la derivada logarítmica que no es otra cosa que la derivada de su logaritmo, o sea del logaritmo de la función y, es decir la expresión $\frac{y'}{y}$ de donde se obtiene la derivada multiplicando simplemente por y. Así en el caso de la función

$$y = u^v$$

donde u y v son funciones de x, resulta:

$$Ly = vLu$$

$$\frac{y'}{y} = v'Lu + v\,\frac{u'}{u}$$

$$y' = \left(v'Lu + v\,\frac{u'}{u}\right)y$$

pero como $y = u^v$

$$y' = vu^{v-1}u' + u^vLu\cdot v'$$

54.- Derivada de expresiones de la forma $f(x,y) = 0$.-Como ya hemos visto, en el párrafo referente a las funciones, la ecuación $f(x,y) = 0$ define una de las variables como función implícita de la otra. Por supuesto que no trataremos aquí, sino que lo dejaremos para un estudio posterior, las condiciones que aseguran la existencia y la derivación de tales funciones. Admitida su existencia la determinación de las derivadas de las funciones implícitas, se efectúa sin dificultad.

Sea $u = f(x,y)$ una función contínua y uniforme de dos variables independientes x e y. Si se atribuye a y un valor constante y se hace variar x, u viene a ser una función contínua de x solamente. Si ella admite una derivada, ésta se llama la derivada parcial de u respecto de x. Esta derivada parcial es así, por definición, el límite de la razón:

$$\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

cuando la diferencia Δx tiende a cero. Es frecuente representarla por una u otra de las siguientes notaciones:

$$f'_x(x,y) \; ; \qquad D_x f(x,y) \; ; \qquad D_x u \; ; \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \; ; \qquad \frac{\partial u}{\partial x}$$

Análogamente, considerando x como constante e y como variable, la razón:

$$\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

puede tener un límite cuando y tienda a cero, éste límite es la derivada parcial de u respecto y. Ella se representa por símbolos semejantes a los precedentemente indicados.

Tratemos ahora de determinar la derivada de la función $f(x,y) = 0$. Para mayor simplicidad pongamos momentáneamente:

$$u = f(x,y)$$

incrementando.

$$u + \Delta u = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$$

y restando

$$\Delta u = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,y)$$

o bien

$$u = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x,y)$$

luego

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Haciendo tender Δx a cero, resulta:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Pero puesto que $u = f(x,y) = 0$ se tiene que: $\frac{du}{dx} = 0$. Luego:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

de donde:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$$

Para lograr esta fórmula hemos supuesto $f(x,y)$ continua y además la existencia de $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ siendo esta última derivada diferente de cero.

Veamos un ejemplo: determinar la derivada de la ecuación $x^y = y^x$.

Tememos:

$$u = x^y - y^x = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1} - y^x Ly \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y Lx - xy^{x-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-1} - {}^{x}Ly}{x^y Lx - xy^{x-1}}$$

y amplificando por xy y luego simplificando por $x^y = y^x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - xyLy}{x^2 - xyLx}$$

55.- <u>Derivada de un determinante - Wronskiano</u>.- Consideremos un determinante de 2^2 elementos, en el cual sus elementos son funciones de una misma variable, derivables en un intervalo común (a,b) Así sea:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11}(x) , & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) , & f_{22}(x) \end{vmatrix}$$

Desarrollando se tiene:

$$\Delta = f_{11}(x)f_{22}(x) - f_{21}(x)f_{12}(x)$$

y derivando:

$$\Delta' = f'_{11}(x)f_{22}(x)+f_{11}(x)f'_{22}(x)-f'_{21}(x)f_{12}(x)-f_{21}(x)f'_{12}(x$$

o sea que:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f'_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f'_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f'_{22}(x) \end{vmatrix}$$

Lo que nos indica que Δ' es la suma de dos determinantes cada uno de los cuales se obtiene del primitivo derivando los elementos de una columna y dejando la otra inalterable.

La regla aquí en contrada para un determinante de segundo orden, se extiende al caso general por medio del siguiente teorema.

Teorema 108.— La derivada de un determinante de n^2 elementos, en el cual los elementos son funciones derivables de una misma variable en un intervalo común, está dada por la suma de n determinantes del mismo orden, cada uno de los cuales se obtiene reemplazando cada una de las columnas del determinante dado por la respectiva columna derivada, dejando las columnas restantes inalterables.

Supongamos exacto el teorema para un determinante de $(n-1)^2$ elementos y tratemos de demostrar que entonces él vale para un determinante de n^2 elementos, de acuerdo con la inducción completa el asunto estaría despachado.

Consideremos entonces el determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1,n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{2,n} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \cdots & f_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} & \cdots & f_{n,n} \end{vmatrix}$$

donde los elementos $f_{r,s}$ son funciones de una misma variable x, derivables en un mismo intervalo. Designando con $\varphi_{r,s}$ el determinante remanente de $f_{r,s}$, el desarrollo de Δ respecto de la primera columna será:

$$\Delta = f_{11}\,\varphi_{11} + f_{21}\,\varphi_{21} + \cdots\cdots + f_{n1}\,\varphi_{n1}$$

de donde derivando resulta:

$$\Delta' = f'_{11}\,\varphi_{11} + f_{11}\,\varphi'_{11} + f'_{21}\,\varphi_{21} + f_{21}\,\varphi'_{21} + \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots + f'_{n1}\,\varphi_{n1} + f_{n1}\,\varphi'_{n1}$$

o sea:

$$\Delta' = \left[f'_{11}\,\varphi_{11} + f'_{21}\,\varphi_{21} + \cdots\cdots + f'_{n1}\,\varphi_{n1}\right] + \left[f_{11}\,\varphi'_{11} + f_{21}\,\varphi'_{21} + \cdots\cdots + f_{n1}\,\varphi'_{n1}\right]$$

El primer paréntesis es el determinante que se obtiene de Δ sustituyendo cada elemento de la primera columna por su respectiva derivada. En el segundo paréntesis φ'_{r1} es la suma de n-1 determinantes formados según la regla que hemos supuesto verificada para los determinantes de n-1 elementos; si se designan estos determinantes con la notación $\varphi^{(2)}_{r1}$, $\varphi^{(3)}_{r1}$ $\varphi^{(4)}_{r1}$..... etc, en el segundo paréntesis están las sumas:

$$f_{11}\,\varphi^{(2)}_{11} + f_{21}\,\varphi^{(2)}_{21} + \cdots\cdots + f_{n1}\,\varphi^{(2)}_{n1}$$

$$f_{11}\,\varphi^{(3)}_{11} + f_{21}\,\varphi^{(3)}_{21} + \cdots\cdots + f_{n1}\,\varphi^{(3)}_{n1}$$

$$f_{11}\,\varphi^{(4)}_{11} + f_{21}\,\varphi^{(4)}_{21} + \cdots\cdots + f_{n1}\,\varphi^{(4)}_{n1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{11}\,\varphi^{(n)}_{11} + f_{21}\,\varphi^{(n)}_{21} + \cdots\cdots + f_{n1}\,\varphi^{(n)}_{n1}$$

que son los desarrollos de los determinantes que se obtienen de Δ sustituyendo los elementos de la segunda, tercera, cuarta, etc., columna por su derivada.

De aquí entonces que el teorema está demostrado; demás está decir que la derivación por columnas se puede reemplazar por la derivación de renglones.

Definición.-

Habiéndose dado n funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots$ $\ldots f_n(x)$ de una misma variable, definidas en un mismo intervalo, se dice que ellas son linealmente dependientes, si es posible determinar n constantes a_1, a_2, $\ldots$, a_n tales que se tenga para todo punto del intervalo considerando que:

$$a_1f_1(x)+a_2f_2(x)+\ldots\ldots+a_nf_n(x) = 0$$

Cuando entre las n funciones no existe una igualdad de este tipo se dice que ellas son linealmente independientes.

Dadas n funciones en estas condiciones, si ellas son derivables hasta el orden $n-1$, el determinante:

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x), & f_2(x) & \ldots\ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots\ldots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_n^{(n-1)}(x) & & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

que contiene como elementos del primer renglón las funciones dadas, como elementos del segundo renglón sus primeras derivadas y así sucesivamente, se llama el determinante Wronskiano de las funciones dadas.

Por medio de este determinante es posible reconocer la dependencia o independencia lineal de n funciones dadas, en virtud del teorema siguiente:

Teorema 109.-

La condición necesaria y suficiente para que n funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$,.......,$f_n(x)$ sean linealmente dependientes es que su determinante Wronskiano sea idénticamente nulo.

56.- Ejercicios propuestos.-

1°.- Determinar las derivadas de las siguientes funciones, con respecto a la variable x.

$a(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ $\qquad$ $f(x) = \text{arc sen}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$b(x) = L\,\frac{x}{a^x}$ $\qquad$ $g(x) = \sec(L\sqrt{a^2+x^2})$

$c(x) = 10^{L\,\text{sen}\,x}$ $\qquad$ $h(x) = (\text{tg}^3 x^2)^{\text{cosec}\,10^x}$

$d(x) = \text{sen}\,e^x \cdot Lx$ $\qquad$ $i(x) = \text{arc}\cos(\text{sen}\,x)$

$e(x) = \text{arc tg}\,10^{x^2} \cdot L\cos x^3$ $\qquad$ $j(x) = L(Lx)$

2°.- Determinar las derivadas de y con respecto a x en las expresiones siguientes:

$\text{tg}\,y = e^{\cos^2 x} \cdot \text{sen}\,x$ $\qquad$ $x = e^{\text{arc tg}\,\frac{y-x^2}{x^2}}$

$(\cos y)^2 = (\text{sen}\,y)^x$ $\qquad$ $x^n \cdot y^m = (x+y)^{m+n}$

$y = x^{y^x}$ $\qquad$ $y = e^{\text{arc tg}\,y} \cdot L\sec^2 x^n$

3°.- Calcular las derivadas de las funciones hiperbólicas directas e inversas.

4°.- Derivar $f(x) = {}^{10}\log x$ con respecto a x^2

5°.- Derivar $f(x) = x^{\operatorname{arc\,sen} x}$ con respecto a $\operatorname{arc\,sen} x$

6°.- Derivar $f(x) = Lx$ con respecto a $e^{\operatorname{sen} x}$

7°.- Derivar $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ con respecto a $\operatorname{arc\,tg} x$.

8°.- Derivar $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2x}{1-x^2}$ con respecto a $\operatorname{arc\,sen} \dfrac{2x}{1-x^2}$.

9°.- Demostrar que si $y = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ se tiene

$$y' = \frac{y^2}{x - xyLx}$$

10°.- Demostrar que si $y = \sqrt{\operatorname{sen} x + \sqrt{\operatorname{sen} x + \sqrt{\operatorname{sen} x + \cdots}}}$, se tiene que $y' = \dfrac{\cos x}{2y-1}$

11°.- Calcular la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$, estando x expresado por grados sexagesimales.

12°.- Derivada de $f(x) = LLLL.....L(Lx)$, donde la expresión contiene n logaritmos.

13°.- Derivada de la función $y = {}^{x}\log a$ siendo $a > 0$ y $0 < x \neq 1$.

14°.- Calcular la derivada del determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x^2 & 1 \\ 1 & 1 & x^3 \end{vmatrix}$$

15°.- Dado la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2x} + (x-1)\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2(x-1)} & \text{para } \begin{matrix} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{matrix} \\ 0 \quad \text{para} \quad x = 0 \quad \text{y para} \quad x = 1 \end{cases}$$

indicar si ella tiene derivada en los puntos $x = 0$ y $x = 1$

16°.- Calcular la derivada de la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x} & \text{para} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \end{cases}$$

17°.- Calcular la derivada de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x = 0 \\ \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{para} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

18°.- Derivada de la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{para} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \end{cases}$$

en el origen.

19°.- Demostrar, sin derivar, que las funciones

$f(x) = L\,\frac{1+x}{1-x}$ y $f\left(\frac{a+x}{1+ax}\right)$ tienen la misma derivada.

20°.- Calcular la derivada de la función

$$f(x) = \text{arc tg}\,\frac{x+a}{1-ax}$$

y aprovechar el resultado para demostrar que

$$\text{arc tg}\,\frac{x+a}{1-ax} = \text{arc tg}\,x + \text{arc tg}\,a.$$

21°.- Si $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ tienen derivadas $\varphi'(x)$ y $\psi'(x)$, demostrar que la derivada de la función

$$f(x) = \text{arc tg}\,\frac{\varphi(x) + \psi(x)}{1 - (x)\cdot\psi(x)}$$

con respecto a x, es

$$f'(x) = \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)} + \frac{\psi'(x)}{1+\psi^2(x)}$$

22°.- Demostrar, sin derivar, que la derivada de la función

$$f(x) = \cos x\,(1 + \text{tg}\,x\cdot\text{tg}\tfrac{x}{2})$$

es nula.

23°.- Idem para la función $f(x) = \dfrac{\cot^2 x\cdot\cos^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x}$

24°.- Determinar a_1, a_2, a_3,......,a_n, de modo que la derivada de la función

$$f(x) = (x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n)e^x$$

sea igual a: $x^n e^x$

25°.- Determinar los números $a_1, a_2, a_3, \dots\dots, a_n$, de modo que la derivada de la función:

$$f(x) = \left(\frac{1}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \frac{a_{n-1}}{x}\right)e^x$$

sea de la forma

$$f'(x) = \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x^{n+1}}\right)e^x$$

26°.- Un móvil recorre una circunferencia, determinar en que posición del primer cuadrante el arco crece dos veces más rápido que su ordenada.

27°.- Un hombre cuya altura es 1,8 m se aleja de un foco luminoso situado a 3 m de altura con una velocidad de 6,5 Km/hora. Con qué velocidad se mueve la sombra de su cabeza.

28°.- Los rayos del sol forman un ángulo de 30° con el horizonte. Una pelota se deja caer desde una altura igual a 19,6 m. Se pide la velocidad de la sombra de la pelota en el instante en que ella toca el suelo.

29°.- Cae agua en un tiesto semi-esférico de 35 cm de diámetro con una velocidad igual a 5 cm³/seg. Se pregunta la velocidad con que sube el nivel en el momento en que el agua desborda.

30°.- Una solución se vacía en un filtro cónico, de 6 cm de radio y de 24 cm de altura, con una velocidad de 2 cm³/seg. Sabiendo que ella escurre a razón de 1 cm³/se-con que velocidad sube el nivel de la solución en el instante en que ella llega a un tercio de la altura?

31°.- Un ángulo crece con velocidad constante. Demostrar que la tangente y el seno de dicho ángulo crecen con la misma velocidad cuando el ángulo es nulo y que la tangente crece ocho veces más rápido que el seno cuando el ángulo es de $\frac{\pi}{3}$ radianes.

32°.- Demostrar la independencia lineal de las funciones: e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax} y e^{bx}.

33°.- Demostrar que las funciones $x\cos^2x$, $x^2\cos^4x$, $x\cdot\cos 4x$ y x son linealmente dependientes y determinan los coeficientes de la ralación.

- oOo -

CAPITULO VIII

PROPIEDADES DE LA DERIVADA DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL.

57.- Función creciente y función decreciente en un punto.-

Dada una función $y=f(x)$ de una sola variable diremos que ella es creciente en el punto $x = c$, si existe un intervalo $(c-h, c+h)$ en el cual se tiene:

$$f(c-h) < f(c) < f(c+h)$$

Análogamente se dirá que la función es decreciente en el punto $x = c$, si existe un intervalo $(c-h, c+h)$ tal que para todo punto de él se tenga.

$$f(c-h) > f(c) > f(c+h)$$

Teorema 110.- Sea $f(x)$ una función con derivada distinta de cero en un punto c; si $f'(c)>0$ la función es creciente en dicho punto, si $f'(c)<0$ la función es decreciente en él.

D.-

La demostración la haremos suponiendo que $f'(c) > 0$, en el caso contrario la demostración es análoga.

Por definición tenemos que:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

lo que de acuerdo con la definición de límite puede expresarse diciendo que:

$$\left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - f'(c) \right| < \varepsilon \qquad \text{para todo } 0 < |h-0| < \eta$$

siendo ε un número arbitrario positivo. O bien expresándolo de otra manera

$$f'(c) - \varepsilon < \frac{f(c+h) - f(c)}{h} < f'(c) + \varepsilon$$

para todo h tal que $\quad 0 < |h - 0| < \eta$

Ahora puesto que $f'(c) > 0$ y ε es arbitrario y por consiguiente tan pequeño como se quiera, se tendrá que

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0 \qquad \text{para } 0 < |h - 0| < \eta$$

y por consiguiente si $h > 0$ se tendrá necesariamente

$$f(c+h) > f(c)$$

y si $h<0$

$$f(c+h)< f(c)$$

O sea que en $(c, c+h)$ se tendrá

$$f(c\ )< f(c+h)$$

y en $(x_c - h, c)$

$$f(c)> f(c-h)$$

y finalmente de acuerdo con estas dos últimas desigualdades se tendrá que en $(c-h, c+h)$

$$f(c-h) < f(c) < f(c+h)$$

<u>Teorema (de Rolle) 111.-</u> Sea la función $f(x)$, continua en el intervalo (a,b), que se anula para $x = a$ y para $x = b$, si ella admite una derivada finita o infinita para todo punto del intervalo (a y b pueden ser excluídos), esta derivada se anulará a lo menos en uno de los puntos comprendidos entre a y b.

H.- $f(x)$ continua en (a,b); $f(a) = f(b) = 0$; existe $f'(x)$ en (a,b)

T.- $f'(c) = 0$ siendo $a< c< b$.

D.-

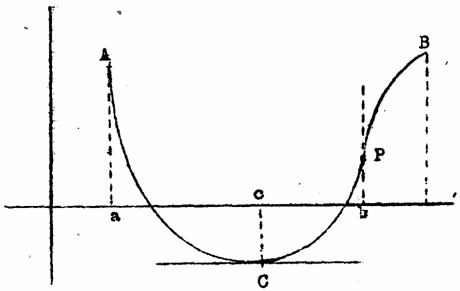
En efecto siendo $f(x)$ continua en (a,b) ella admite una frontera superior M y una frontera inferior m, es decir ella admite en el intervalo (a,b) un valor más grande M y uno más pequeño m. Dintinguiremos dos casos: 1°. Si M y m son ambos nulos ($M = m = 0$), $f(x)$ será igual a cero en todo el intervalo (a,b), ella es pues una constante M en tal caso su derivada será siempre nula, lo que demuestra el teorema. 2°. Si al contrario M o m es diferente de cero, la función $f(x)$ tomará este valor más grande (o más pequeño) para algún valor c de x comprendido entre a y b. Se tendrá entonces que $f'(c) = 0$; pues de otro modo siendo $f'(c)>0$ ó $f'(c)<0$ la función será respectivamente creciente o decreciente en el punto c y por lo tanto no será en ninguno de los dos casos ni el más grande ni el más pequeño valor supuesto.

Corolario.-

Si una función $f(x)$ continua en un intervalo toma el mismo valor para los puntos $x = a$ y $x = b$; su derivada se anula a lo menos en un punto c comprendido entre a y b.

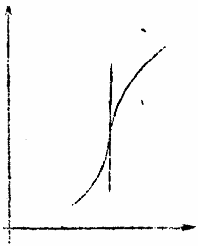
En efecto la función $f(x) - f(a)$, que tiene la misma derivada que $f(x)$, se anula para $x = a$, y para $x = b$.

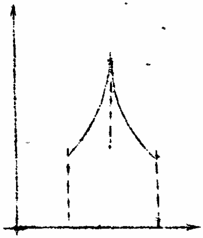
58.- Interpretación geométrica del teorema de Rolle.- La interpretación geométrica del teorema de Rolle es la siguiente: sea el gráfico de $f(x)$ una curva continua que posee tangente para todos sus puntos, exceptuando tal posibilidad en los puntos A y B, los cuales están a la misma altura sobre el eje de las x (corola



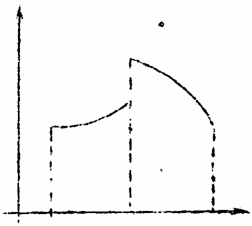
rio). En tales circunstancias existe a lo menos algún punto c de la curva en el cual la tangente a ella es paralela al eje de las abscisas. Puesto que $f'(x)$ puede ser infinito, el gráfico puede tener puntos de inflección con tangentes verticales como en el punto P indicado en ola figura.

Si $f'(x)$ no existe en algún punto del intervalo (a,b) el teorema no es necesariamente verdadero, como lo muestra la fig .





Si $f(x)$ no es continua en (a,b) no es tampoco necesariamente verdadero como lo indica la fig.



Teorema 112°.- Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo (a,b) con derivada en todos sus puntos pudiendo exceptuarse a y b; entonces para algún punto c comprendido entre a y b se tiene:

$$f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$$

H.- Sea $f(x)$ continua en (a,b); existe $f'(x)$ en (a,b);

T.- $f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)$. $(a<c<b)$

D.-

Consideremos la función auxiliar:

$$\varphi(x) = (b-a)\left[f(x) - f(a)\right] - (x-a)\left[f(b) - f(a)\right]$$

que será continua y tendrá una derivada única en (a,b) ya que tal cosa ocurre con la función $f(x)$ por hipótesis. Esta función además se anula para $x = a$ y para $x = b$; de donde en virtud del teorema de Rolle su derivada:

$$\varphi'(x) = (b-a)\, f'(x) - \left[f(b) - f(a)\right]$$

se anulará para algún valor c de x comprendido entre a y b, es decir

$$\varphi'(c) = 0 \qquad \text{estando} \quad a < c < b \qquad \text{luego:}$$

$$0 = (b-a)\, f'(c) - \left[f(b) - f(a)\right]$$

o bien

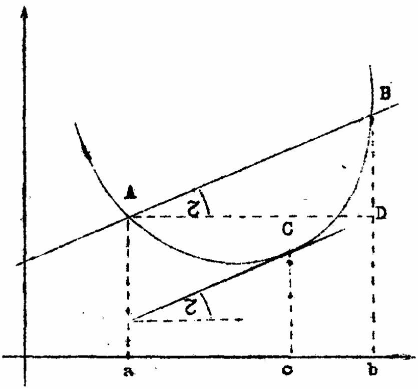
$$f(b) - f(a) = (b-a)\, f'(c).$$

Esta relación entre el incremento de $f(x)$ y el de la variable x, lleva el nombre de fórmula de los incrementos finitos. A menudo suele darse a ella otra forma. Reemplacemos a por x y b por $x + h$, entonces c, que está comprendido entre x y $x + h$ podrá escribirse en la forma $x + \theta h$, siendo θ un número mayor que cero pero menor que 1. Entonces se tiene:

$$f(x+h) - f(x) = h\, f'(x + \theta h)$$

La fórmula anterior no supone que a deba ser menor que b, pues también podría haberse razonado en igual forma sobre el intervalo (b,a); de acuerdo con esto h tiene signo cualquiera. La fórmula de los incrementos finitos es una de las fórmulas fundamentales del Cálculo Diferencial ya que ella se utiliza en la demostración de numerosas cuestiones.

59.- Interpretación geométrica del teorema de los incrementos finitos.- Sea $y = f(x)$ una función continua y definida en un intervalo (a,b) y tal que tenga derivada en todos sus puntos (a y b pueden ser excluídos). Sea la curva indicada en la figura su representación. La dirección de la cuerda A B, está dada por:



$$tg\, z = \frac{DB}{AD} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

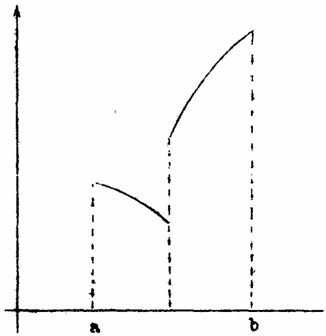
Ahora el teorema de los incrementos finitos establece que sobre el arco AB existe un punto C de abscisa c, tal que la tangente trazada a la curva en dicho punto es paralela a la cuerda AB; estando $a < c < b$. De modo que hay un c tal que:

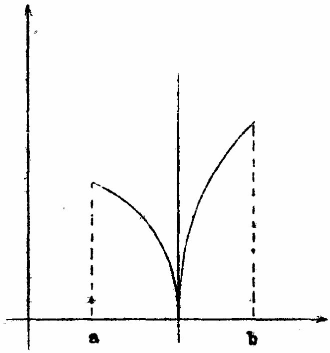
$$tg\, z = f'(c)$$

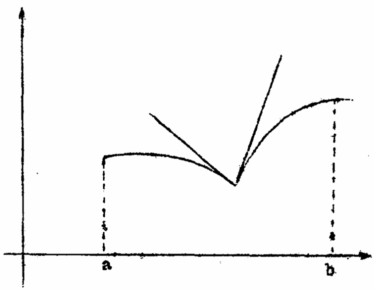
de donde por comparación se obtiene:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Cuando alguna de las condiciones que aparecen en la hipótesis de este teorema, no se cumple, el punto c puede no existir, como se observa en las figuras siguientes:







En el primer caso la función no es continua en el intervalo (a,b). En el segundo y en el tercer caso la derivada no existe en algún punto de (a,b)

Veremos ahora algunos teoremas de deducción inmediata y de gran utilidad en nuestros estudios posteriores.

Teorema 113.-

Si $f(x)$ es una función continua en (a,b), de derivada constante en (a,b) es decir $f'(x) = p$ entonces la función es de la forma:

$$f(x) = p\,x + q$$

donde q también es una constante.

D.-

Sea x a un punto del intervalo (a,b); la función $f(x)$ satisface las condiciones del teorema de los incrementos finitos en el intervalo (a,x). De modo que:

$$f(x) - f(a) = (x-a)\,f'(c) \qquad \text{siendo } a<c<x$$

por hipótesis tenemos

$$f'(c) = p$$

de donde

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,p$$

$$f(x) = px + f(a) - ap$$

y llamando

$$q = f(a) - ap$$

queda

$$f(x) = px + q$$

Ahora puesto que por hipótesis, $f(x)$ es continua, la igualdad establecida es también válida para $x = a$.

Corolario.-

Si $f(x)$ es continua en (a,b) con derivada nula en dicho intervalo, entonces $f(x)$ es constante en (a,b)

En efecto de acuerdo con el teorema anterior tenemos:

$$f(x) = p\,x + q$$

pero como aquí

$$p = f'(x) = 0$$

queda

$$f(x) = q.$$

Teorema 114.-

Si dos funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ tienen derivadas finitas e iguales en el intervalo (a,b), entonces ellas no difieren sino en una constante, en dicho intervalo.

D.- Consideremos la función

$$F(x) = f(x) - \varphi(x)$$

su derivada es

$$F'(x) = f'(x) - \varphi'(x)$$

constantemente nula por hipótesis, de ahí entonces, que em virtud del corolario anterior, la función sea contante, es decir:

$$F(x) = f(x) - \varphi(x) = p$$

de donde

$$f(x) = \varphi(x) + p$$

Este teorema es el teorema fundamental del Cálculo Integral, en el cual se trata de encontrar todas las funciones que tienen una derivada conocida. De acuerdo con este teorema se ve que el problema estará resuelto conocida una de las funciones, pues las otras se deducen por adición de una constante.

Teorema 115.-

Sea $f(x)$ una función continua en (a,b) de derivada finita o infinita en tal intervalo, pero no constantemente nula. En tales condiciones $f(x)$ es monótoma creciente en (a,b) si $f'(x)$ es positiva y monótona decreciente si $f'(x)$ es negativa.

D.-

Sean x_1 y x_2 dos puntos del intervalo (a,b) de modo que:

$$a \leq x_1 < x_2 \leq b$$

De acuerdo con el teorema de los incrementos finitos:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\, f'(c) \qquad x_1 < c < x_2$$

Puesto que $x_2 > x_1$, tenemos $x_2 - x_1 > 0$ además $f'(c)$ tiene un signo, cuando ella no es cero; se tendrá entonces:

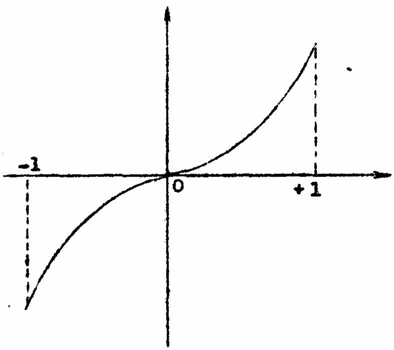
$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad \text{para } f'(c) > 0$$

$$f(x_2) - f(x_1) < 0 \qquad \text{para } f'(c) < 0$$

lo que demuestra la tesis ya que hemos dicho que $x_2 - x_1 > 0$

Observación.-

Hemos establecido que cuando la derivada de una función es positiva en un intervalo, la función $f(x)$ es creciente en un intervalo. La proposición recíproca de esta, o sea: Si una función es creciente en un intervalo su derivada es positiva; es falsa, en efecto basta considerar un ejemplo: sea la parábola cúbica $y = x^3$ en el intervalo $(-1, +1)$, tal función es creciente en dicho intervalo, sin embargo su derivada en el punto $x = 0$ es nula. Geométricamente considerada la situación se vé que



la curva presenta en 0 un punto de inflexión, la tangente a la curva en dicho punto se confunde con el eje de las abscisas. La conclución extricta que corresponde a este caso es que:

$$f'(x) \geq 0$$

Teorema 116.-

Sean $f(x)$ y $\varphi(x)$ dos funciones continuas en el intervalo (a,b) con derivadas determinadas y finitas para todo punto de dicho intervalo. Si las dos derivadas $f'(x)$ y $\varphi'(x)$ no se anulan simultáneamente en (a,b) y si además $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, se tendrá:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \qquad \text{para} \quad a < c < b$$

D.-

Tomemos la función $F(x)$ definida por:

$$F(x) = f(x)\left[\varphi(b) - \varphi(a)\right] - \varphi(x)\left[f(b) - f(a)\right]$$

Se observa sin dificultad que ella toma el mismo valor para $x = a$ y $x = b$, en efecto

$$F(a) = F(b) = f(a)\,\varphi(b) - \varphi(a)\,f(b)$$

de acuerdo entonces con el corolario obtenido en el Teorema de Rolle, la derivada de esta función se anularía para algún valor c comprendido entre a y b. Así:

$$f'(c) = f'(c)\left[\varphi(b) - \varphi(a)\right] - \varphi'(c)\left[f(b) - f(a)\right] = 0 \quad \text{con} \quad a < c < b$$

Ahora en esta igualdad $\varphi'(c)$ no puede ser nulo, pues si lo fuera también debería serlo $f'(c)$, ya que $(b) - (a) \neq 0$, lo que sería contrario a la hipótesis, de aquí entonces que dividiendo por $\varphi'(c)$ y por $\varphi(b) - \varphi(a)$, resulta:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \qquad \text{con} \qquad a < c < b$$

Observación.-

Si $\varphi'(x)$ no se anula para $a < x < b$, tampoco se podrá anular $f'(x)$ en (a,b) de acuerdo con la igualdad (a); además también se verifica que $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, pues si $\varphi(a) = \varphi(b)$ la derivada $\varphi'(x)$ devería anularse en virtud del teorema de Rolle.

Esta fórmula se conoce con el nombre de fórmula de Cauchy y la de los incrementos finitos no es sino un caso particular de ella, en efecto basta hacer en ella

$\varphi(x) = x$

Teorema 117.-

Si $f(x)$ es continua y derivable en un intervalo (a,b), $f'(x)$ no puede pasar de un valor a otro en este intervalo sin pasar por todos los valores intermediarios.

D.-

Consideremos primero el caso en que $f'(a)$ y $f'(b)$ sean de signos contrarios; nosotros afirmamos que $f'(x)$ se anula para algún valor comprendido entre a y b. En efecto, supongamos $f'(a)>0$ y $f'(b)<0$; de acuerdo con esto el mayor valor de $f(x)$ no puede estar ni en a ni en b, El estará en algún intermediario c, en donde se tendrá $f'(c) = 0$.

Pasemos ahora al caso general, sea p un número comprendido entre $f'(a)$ y $f'(b)$; la función $f(x)$ $f(x) - px$ tiene sus derivadas de signos contrarios en a y b. De donde, de acuerdo con el razonamiento anterior, existe un punto intermediario c tal que: $f'(c) - p = 0$ y por consiguiente, $f'(c) = p$.

Esta propiedad enunciada en el teorema, pertenece a las funciones continuas pero no las caracteriza.

60.- Ejercicios propuestos.-

1.- Demostrar que si la función $f(x)$ tiende hacia infinito cuando x tienda a un valor finito a, la derivada $f'(x)$ no puede tender a un valor finito cuando x tiende hacia a.

2.- Calcular $y = \text{sen}\, 31°$ con dos decimales exactos. Aplíquese la fórmula a los incrementos finitos.

3.- Determinar una función $f(x)$ tal que

$f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$ admitiendo la existencia de $f'(x)$

4.- Determinar una función $f(x)$ tal que se tenga para todo x e y que

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{2\ f(x)\ f(y)}{f(x) + f(y)}$$

Se admite la existencia de $f'(x)$.

5.- Demostrar que si en la fórmula de los incrementos finitos se hace tender h a cero dejando x fijo, resulta que θ tiende a $1/2$.

6.- Si $f(x)$, $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son funciones continuas que admiten derivadas en el intervalo $(x, x+h)$, demostrar que:

$$\begin{vmatrix} f(x+h) & (x+h) & (x+h) \\ f(x) & (x) & (x) \\ f'(x+\theta h) & '(x+\theta h) & '(x+\theta h) \end{vmatrix} = 0$$

7.- Demostrar que si se tiene

$$\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \ldots\ldots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_1 = 0 \quad \text{entonces}$$

la ecuación

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots \quad a_{n-1}x+a_n = 0$$

tiene a lo menos una solución entre cero y uno.

8.- Demostrar que si $f(x)$ tiene una derivada $f'(x)$ en el intervalo (a,b) tal que si $a<c<b$ resulta $\lim_{x \to c} f(x) = 1$, entonces $f'(c) = 1$

9.- Demostrar que una función es creciente en un intervalo cuando ella es creciente en todo punto de él. (Ver párrafo 27).

10.- Demostrar que la función $f(x) = Lx$ no es función racional.

11.- Demostrar que una función es creciente en un intervalo cuando ella es creciente en todo los puntos de el. Cómo podrá subsanarse la dificultad que se presenta en los extremos del intervalo?

- oOo -

C A P I T U L O IX

DIFERENCIALES Y DERIVADAS SUCESIVAS

61.- Función diferenciable.- Hasta aquí hemos representado la derivada de la función $y = f(x)$ por la notación

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

y hemos insistido especialmente en que el símbolo $\frac{dy}{dx}$ no debe ser considerado como una fracción ordinaria con dy como numerador y dx como denominador, sino como un simple símbolo que designa el límite del cuociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando Δx tiende a cero. Es conveniente sin embargo dar una significación a dx y dy separadamente, ya que tal cuestión es de mucha utilidad en numerosas cuestiones prácticas. A continuación indicaremos como es frecuente proceder.

Una función $f(x)$ se dice, por definición, diferenciable en un punto x si ella es finita y determinada en los alrededores de ese punto, y si, dando a x un incremento arbitrario Δx, la diferencia o incremento Δy correspondiente a la función se puede expresar en la forma:

$$y = A \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x \qquad \text{(a)}$$

donde A es una cantidad independiente de x y ε una cantidad que tiende a cero junto con Δx. El primer término del segundo miembro de la igualdad anterior, toma el nombre de diferencial de y denotándose por la expresión dy, de modo que por definición

$$dy = A \cdot \Delta x \qquad \text{(b)}$$

Ahora de la igualdad (a) se obtiene:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \varepsilon$$

de donde

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A \qquad \text{(c)}$$

lo que prueba que si la función $f(x)$ es diferenciable, $f'(x)$ existe y tiene un valor finito A. Recíprocamente, si $f'(x)$ existe y tiene un valor finito A, la ecuación (a) tiene lugar por definición de la derivada. De donde deducimos que la condición necesaria y suficiente para que la función $f(x)$ sea diferenciable en el punto x es que ella tenga, en ese punto, una derivada finita y determinada. Se tiene en este caso de acuerdo con las relaciones (b) y (c) que:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

Vemos pues que la diferencial de una función es el producto de su derivada, supuesta existente y finita, por una diferencia arbitraria Δx atribuída a la variable independiente.

Teorema 118.-

Sea $y = f(x)$ una función con derivada finita y diferente de cero en el punto (x,y), entonces si Δx tiende a cero, la razón entre Δy y dy tiende a la unidad.

D.-

Se tiene por definición de derivada que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x)$$

donde $\varepsilon(\Delta x)$ es una función de Δx que tiende a cero junto con Δx. Dividiendo la igualdad por $f'(x)$ que es diferente de cero, se tiene:

$$\frac{\Delta y}{f'(x) \cdot \Delta x} = 1 + \frac{\varepsilon(\Delta x)}{f'(x)}$$

o sea

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\varepsilon(\Delta x)}{f'(x)}$$

y luego

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1$$

ya que $\varepsilon(\Delta x)$ tiende a cero junto con Δx y además $f'(x)$ tiene un valor finito y distinto de cero:

De aquí se desprende que, cuando Δx tiende a cero, Δy y dy son dos cantidades suceptibles de ser sustituídas la uno por la otra, por supuesto, bajo las condiciones ya establecidas. Sin embargo es conveniente observar que muy a menudo es necesario no confundirlas.

Para hacer la notación más homogénea es costumbre reemplazar Δx, por el símbolo dx, en la expresión de dy. Nosotros tenemos entonces:

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

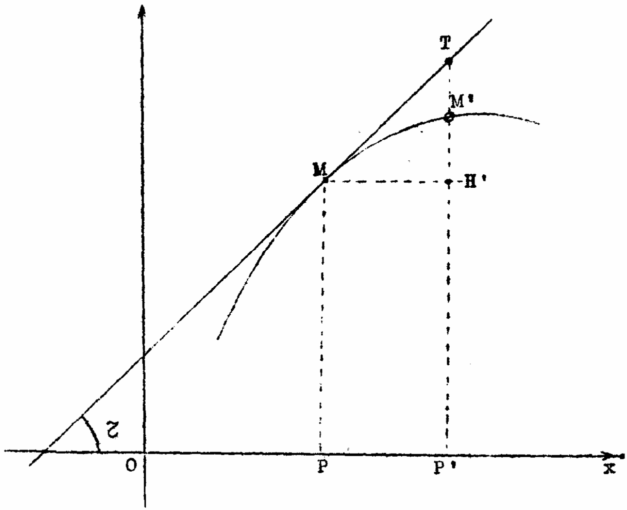
De donde la diferencial de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente.

Dividiendo por dx se encuentra:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

O sea que la derivada de una función es igual a la razón de la diferencial de la función a la diferencial de la variable independiente.

62.- Interpretación geométrica de la diferencial.- Consideremos la curva representada por la ecuación $y = f(x)$ y designemos por M y M' los puntos de la curva que tienen por coordenadas (x,y) , $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$. Tracemos MP



y $M'P'$ perpendiculares a Ox y MH paralela a Ox; sea T el punto de encuentro de $P'M'$ con la tangente a la curva en M. Tenemos así:

$$x = OP \qquad y = PM$$

$$x + \Delta x = OP' \qquad y + \Delta y = P'M'$$

y por consiguiente:

$$\Delta x = PP' = MH \qquad \Delta y = HM'$$

Designando, como siempre, por z el ángulo que forma la tangente a la curva en M con el eje de las abscisas tenemos:

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{HT}{MH}$$

de donde

$$HT = MH \cdot \operatorname{tg}\tau$$

pero como

$$\operatorname{tg}\tau = f'(x)$$

queda

$$HT = f'(x) \cdot \Delta x = dy$$

O sea la diferencial de $f(x)$ es igual al incremento de la ordenada de la tangente a la curva $y = f(x)$ cuando se pasa de la abscisa x del punto de contacto a otro punto de abscisa $x + \Delta x$.

De acuerdo con esto, la diferencial de dy puede ser considerada como el valor aproximado de Δy que se obtiene reemplazando la curva $y = f(x)$ por su tangente en el punto (x,y)

63.- Diferencial de una función de función.- Sea $y = f(u)$ una función en la cual u es una función de la variable independiente x; sabemos que:

$$y'_x = f'(u) \cdot u'_x$$

y por lo tanto

$$dy = f'(u)\ u'_x \cdot dx$$

y como

$$du = u'_x \cdot dx$$

resulta

$$dy = f'(u)\ du$$

Vemos pues que la fórmula que nos dá la diferencial dy es tal cual si u fuese la variable independiente. Esta es precisamente una de las ventajas de la notación diferencial; en efecto con la notación de las derivadas se tiene que:

$$y' = f'(x) \qquad\qquad y'_x = f'(u) \cdot u'_x$$

según que y esté dado directamente en función de x, o que y dependa de x por otra función intermediaria u. Con la notación diferencial el asunto se simplifica, se obtiene simplemente:

$$dy = f'(x)\ dx \qquad \text{o} \qquad dy = f'(u)\ du$$

64.- Derivadas y diferenciales sucesivas.- Sea $y = f(x)$ una función uniforme de la variable real x, que tiene una derivada en un intervalo. Si esta nueva función $y' = f'(x)$, admite una derivada en un punto x, esta nueva derivada se representa por uno de los siguientes símbolos:

$$y'' \ ; \ f''(x) \ ; \ D^2y$$

y se la llama derivada segunda de y. De igual modo, la derivada tercera de y es la derivada de y''. Ella se designa por y''', $f'''(x)$, D^3y. Continuando así se tiene que: la derivada de orden n de una función es la derivada de la derivada de orden $(n-1)$ de ella y se repre senta por $y^{(n)}$; $f^{(n)}(x)$; $D^n y$.

Si para definir las derivadas sucesivas de una función en un punto a se considera solamente los valores de la variable x que son $\geqslant a$, se obtienen las derivadas sucesivas "a la derecha" del punto a. Se obtiene la derivada "a la izquierda" del punto a, tomando $x \leqslant a$.

Es necesario observar que, de acuerdo con estas definiciones, la existencia de una derivada finita $D^n y$ en un punto x, exige la existencia de una derivada finita $D^{n-1}y$ y determinada en los alrededores de x,y continua en ese punto, y por lo tanto la continuidad de la derivada de menor orden en loa alrededores de ese punto.

Si dy es diferenciable, su diferencial es la "dieferencial segunda de y"; ella se denota por $d(dy) = d^2y$. Esta nueva diferencial depende de la relación que se desea establecer entre la variable x y su diferencia Δx o dx. Si esta diferencia es la misma para todos los valores de x y la misma aún en las diferenciaciones sucesivas, ella debe ser tratada como una constante y en tal caso se tiene:

$$d^2y = d(dy) = d\left[f'(x)dx\right] = \left[f''(x)dx\right]dx = f''(x)dx^2$$

análogamente:

$$d^3y = d(d^2y) = d\left[f''(x)dx^2\right] = \left[f'''(x)dx^2\right]dx = f'''(x)dx^3$$

y así en general:

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n$$

de donde resulta que:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \;;\quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} \;;\; \ldots\ldots \; f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

O sea que: la derivada $n^{\text{ésima}}$ de una función es igual al cuociente entre la diferencial $n^{\text{ésima}}$ de la función y la potencia $n^{\text{ésima}}$ de la diferencial de la variable independiente, tomada como constante respecto de x.

Tenemos pues aquí una nueva manera para expresar la derivada de cualquier orden de una función, notación que es una de las más generalmente empleada.

Observación.- La condición que dx sea constante respecto de x no impide que dx pueda variar desde otro punto de vista. Así puede hacerse tender dx a cero, siempre que tal cosa se haga para todos los valores de x al mismo tiempo y de la misma manera.

65.- Derivadas $n^{\text{ésimas}}$ de algunas funciones.- La determinación de una derivada de orden cualquiera para una función elemental o compuesta no presenta, a parte de la longitud de los cálculos, ninguna otra dificultad, siempre que el orden sea dado numéricamente. Si se desea expresar la derivada $n^{\text{ésima}}$ en función de n, quedando n arbitrario, el problema es más difícil; sin embargo, para algunas funciones elementales, la solución es simple.

Derivada $n^{\text{ésima}}$ de $f(x) = x^m$.- Se encuentra fácilmente:

$$f'(x) = m\,x^{m-1}$$

$$f''(x) = m(m-1)x^{m-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\ \ldots\ldots\ (m-n+1)\ x^{m-n}$$

Suponiendo n entero y mayor que cero esta derivada se reduce a:

$$n!\ ,\ \text{si}\ \ m = n$$

$$0\ ,\ \text{si}\ \ n > m$$

Derivada n^ésima^ de $f(x) = Lx$.- De acuerdo con la cuestión precedente, se tiene:

$$D^n(Lx) = D^{n-1}(x^{-1}) = (-1)(-2)\ \ldots\ldots(-n+1)\ x^{-n}$$

o sea:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

Derivada n^ésima^ de $f(x) = a^x$.- Se tiene:

$$f'(x) = a^x La$$

$$f''(x) = a^x L^2 a$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = a^x L^n a$$

Particularmente $D^n e^x = e^x$.

Derivada $n^{ésima}$ de $f(x) = \text{sen } x$:

Se tiene:

$$f'(x) = \cos x = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$$

$$f''(x) = -\text{sen } x = \text{sen}(x + \frac{2\pi}{2})$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = \text{sen } (x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

Derivada $n^{ésima}$ de $f(x) = \cos x$:

En forma análoga al caso precedente se encuentra sin dificultad que:

$$D^n \cos x = \cos (x + n \frac{\pi}{2})$$

Derivada $n^{ésima}$ de $f(x) = \text{arc tg } x$:

Tenemos:

$$D \text{ arc tg } x = \frac{1}{1 + x^2}$$

de donde

$$D^n \text{arc tg} = D^{n-1} \frac{1}{1+x^2}$$

pero como:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$$

resulta:

$$D^{n-1}\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i} D^{n-1}\left[(x-i)^{-1} - (x+i)^{-1}\right]$$

$$D^{n-1}\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}(-1)^{n-1}(n-1)!\left[(x-i)^{-n} - (x+i)^{-n}\right]$$

$$D^{n-1}\frac{1}{1+x^2} = (-1)^{n-1}(n-1)!\ \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n}\right]$$

Con el fin de eliminar los imaginarios, pongamos:

$$x-i = \rho(\cos\varphi - i \operatorname{sen}\varphi) \qquad \text{de donde:}$$

$$\rho = \sqrt{1+x^2} \qquad\qquad \varphi = \text{arc cot } x$$

así:

$$\frac{1}{x-i} = \frac{1}{\rho}(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

$$\frac{1}{x+i} = \frac{1}{\rho}\ (\cos\varphi - i\ \mathrm{sen}\,\varphi)$$

y de acuerdo con la fórmula de Moivre .

$$\frac{1}{(x-i)^n} = \frac{\cos n\varphi + i\ \mathrm{sen}\ n\varphi}{\rho^n}$$

$$\frac{1}{(x+i)^n} = \frac{\cos n\varphi - i\ \mathrm{sen}\ n\varphi}{\rho^n}$$

Por consiguiente:

$$D^{n-1}\frac{1}{1+x^2} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\rho^n}\ \mathrm{sen}\ n\varphi$$

luego:

$$D^n \mathrm{arc\ tg}\ x = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\ \mathrm{sen}\ (n\ \mathrm{arc\ cot}\ x)$$

66.- Diferencias finitas.- Si se dá a x un incremento Δx, la función continua $f(x)$ toma un incremento

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$$

que llamaremos primera diferencia de $f(x)$. La diferencia de la primera diferencia, es la segunda diferencia; ella se representa por $\Delta^2 y = \Delta^2 f(x)$ y de este modo puede con tinuarse con la diferencias tercera, cuarta, etc. Así tomando la diferencia Δx independientemente de x se obtiene:

$$\Delta^2 f(x) = f(x+2\Delta) - 2\, f(x+\Delta x) + f(x)$$

$$\Delta^3 f(x) = f(x+3\,\Delta x) - 3\, f(x+2\,\Delta x) + 3\, f(x+\Delta x) - f(x)$$

y en general:

$$\Delta^n f(x) = f(x+n\,\Delta x) - \binom{n}{1} f(x+\overline{n-1}\cdot\Delta x) + \binom{n}{2} f(x+\overline{n-2}\cdot\Delta x) - \ldots$$

$$\ldots\ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} f(x+\Delta x) + (-1)^n f(x)$$

lo que también puede escribirse más brevemente poniendo:

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x+\overline{n-k}\cdot\Delta x)$$

Existe entre las diferencias sucesivas y las derivadas sucesivas de una función $f(x)$ una relación importante; ella es:

$$\Delta^n f(x) = \Delta x^n f^{(n)}(x + \theta_n\,\Delta x) \qquad 0 < \theta_n < n$$

o bien

$$\Delta^n f(x) = \Delta x^n f^{(n)}(x + n\theta\,\Delta x) \qquad 0 < \theta < 1$$

Sólo se ha hecho $\theta_n = n\theta$. Para $n = 1$ la fórmula es exacta ya que no es otra que la fórmula de los incrementos finitos. Veamos ahora para $n = 2$.

Ante todo notemos que:

$$\frac{d}{dx} \Delta f(x) = \Delta f'(x)$$

en efecto:

$$\frac{d}{dx} \Delta f(x) = \frac{d}{dx}\left[f(x + \Delta x) - f(x)\right] = f'(x+\Delta x)-f'(x)$$
$$= \Delta f'(x)$$

de aquí se sigue que cualquiera que sea n entero y positivo se tiene:

$$\frac{d}{dx} \Delta^n f(x) = \Delta^n f'(x)$$

Ahora para hacer más comprensible la demostración hagamos:

$$\Delta f(x) = \varphi(x)$$

de donde

$$\Delta f'(x) = \varphi'(x)$$

y de acuerdo con el teorema de los incrementos finitos:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta\varphi(x) = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \Delta x\cdot\varphi'(x+\theta'\Delta x)$$

o sea

$$\Delta^2 f(x) = \Delta x\cdot\Delta f'(x+\theta'\cdot\Delta x) \qquad 0<\theta'<1$$

pero de acuerdo con el mismo teorema:

$$\Delta f'(x+\theta'\Delta x) = f'(x+\Delta x+\theta'\Delta x) - f'(x+\theta'\Delta x)$$

$$= \Delta x\cdot f''(x+\overline{\theta'+\theta_1}\cdot\Delta x) \qquad 0<\theta_1<1$$

luego: $$\Delta^2 f(x) = \Delta x\cdot\Delta x\, f''(x+\overline{\theta'+\theta_1}\cdot\Delta x)$$

y poniendo: $$\theta' + \theta_1 = \theta_2$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta x^2 f''(x+\theta_2\cdot\Delta x) \qquad 0<\theta_2<2$$

Para concluir la demostración usaremos la inducción completa. Será suficiente extender la fórmula desde el orden (n-1) al orden n. Supongamos entonces que:

$$\Delta^{n-1} f(x) = \Delta x^{n-1} f^{(n-1)}(x+\theta_{n-1}\Delta x); 0<\theta_{n-1}<n-1$$

y pongamos para mayor claridad:

$$\Delta^{n-1} f(x) = \psi(x)$$

de donde:

$$\Delta^{n-1} f'(x) = \psi'(x)$$

luego:

$$\Delta^n f(x) = \Delta\psi(x) = \psi(x+\Delta x) - \psi(x)$$

$$= \Delta x \cdot \psi'(x+\theta\,\Delta x) \quad \text{siendo } 0<\theta<1$$

pero

$$\psi'(x+\theta\,\Delta x) = \Delta^{n-1} f'(x+\theta\,\Delta x)$$

luego:

$$\Delta^n f(x) = \Delta x \cdot \Delta^{n-1} f'(x+\theta\,\Delta x)$$

pero por hipótesis:

$$\Delta^{n-1} f'(x+0\,\Delta x) = x^{n-1} f^{(n-1)}(x+\theta\cdot\Delta x+\theta_{n-1}\Delta x) \text{ , con}$$

$$0<\theta_{n-1}<n-1$$

de donde:

$$\Delta^n f(x) = \Delta x^n\, f^{(n)}\,(x+\overline{\theta+\theta}_{n-1}\cdot\Delta x)$$

y llamando

$$\theta + \theta_{n-1} = \theta_n$$

queda

$$\Delta^n f(x) = \Delta x^n\, f^{(n)}(x+\theta_n\,\Delta x) \qquad 0<\theta_n<n$$

y de aquí resulta que si la función $f^{(n)}(x)$ es continua en x

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n} = \lim_{x \to 0} f^{(n)}(x+\theta_n \Delta x) = f^{(n)}(x)$$

Es decir: la derivada $n^{ésima}$, supuesta finita y determinada en un punto, es el límite de la razón entre la diferencia $n^{ésima}$ de la función y la potencia $n^{ésima}$ de la diferencia de la variable (supuesta independiente de x) cuando esta tiende a cero.

67.- Derivada $n^{ésima}$ de un producto. Fórmula de Leibniz:

Si se deriva dos veces el producto $u(x) \cdot v(x)$ de dos funciones de la variable independiente x, se encuentra sucesivamente:

$$D\ uv = v\ Du + u\ Dv$$

$$D^2 u \cdot v = v\ D^2 u + 2\ Du\ Dv + u\ D^2 v$$

Cada término de estas dos primeras derivadas, y también las siguientes, es el producto de una derivada de u por una derivada v, siempre que u y v se consideren como derivadas de orden cero. En la derivada primera Duv, la suma de los índices de derivación es 1 en cada término; en la derivada segunda es igual a 2 y así sucesivamente. Los coeficientes son idénticos a los de la primera y segunda potencia de un binomio. En general se podría demostrar que los coeficientes de la derivada $n^{ésima}$ del producto $u \cdot v$ son idénticos a los del desarrollo de $(a+b)^n$, cuestión que podría realizarse paso a paso, sin embargo es posible establecer tal proposición de una manera muy elegante por medio de una sencilla observación.

De acuerdo con lo ya dicho, se puede poner:

$$D^n u\cdot v = A_o\, uD^n v + A_1\, Du\, D^{n-1}v + A_2\, D^2u\, D^{n-2}v + \dots$$

$$\dots + A_{n-1}D^{n-1}u\, Dv + A_n D^n u\cdot v \qquad (a)$$

donde las letras A_i indican coeficientes numéricos por determinar. Puesto que tales coeficientes no depdenden de la naturaleza de u y v, será suficiente determinarlos para dos funciones particulares. Tomemos para esto:

$$u = e^{ax} \quad , \quad v = e^x \quad \text{de donde} \quad uv = e^{(1+a)x}$$

siendo a una constante cualquiera no nula. De aquí resulta:

$$D^n uv = (1+a)^n\, e^{(1+a)x}$$

y como:

$$D^k u = a^k e^{ax} \qquad\qquad D^{u-k}v = e^x$$

queda:

$$D^k u\cdot D^{n-k}v = a^k e^{kx}\cdot e^x = a^k e^{(1+a)x}$$

que sustituído en (a) dá:

$$(1+a)^n e^{(1+a)x} = A_o e^{(1+a)x} + A_1\, ae^{(1+a)x} + A_2\, a^2 e^{(1+a)x} + \dots$$

$$\dots + A_{n-1}\, a^{n-1}e^{(1+a)x} + A_u\, a^n e^{(1+a)x}$$

y dividiendo ambos miembros por $e^{(1+a)x}$ resulta:

$$(1+a)^n = A_o + A_1 a + A_2\ a^2 + \dots + A_{n-1}\ a^{n-1} + A_n\ a^n$$

lo que nos indica que los coeficientes A_o , A_1 , A_2 son los de fórmula del binomio. O sea que:

$$A_o = \binom{n}{0} \quad ; \quad A_1 = \binom{n}{1} \ ; \ A_2 = \binom{n}{2} \ ; \ \dots\dots\dots$$

$$\dots ; \ A_{n-1} = \binom{n}{n-1} ; \ A_n = \binom{n}{n}$$

Siendo $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ \dots\dots\dots\ (n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ \dots\dots\ k}$ y $\binom{n}{o} = 1$

De aquí entonces que:

$$D^n u\cdot v = \binom{n}{0} u\ D^n v + \binom{n}{1} Du\ D^{n-1}v + \binom{n}{2} D^2u\ D^{n-2}v + \dots\dots$$

$$\dots\dots + \binom{n}{n-1} D^{n-1}u\ Dv + \binom{n}{n} D^n u\cdot v$$

Se puede también expresar simbólicamente esta fórmula, poniendo:

$$D^n u\cdot v = (Du + DV)^n$$

Pero en tal caso será necesario tener presente las siguientes condiciones en el desarrollo del segundo miembro: se reemplazarán Du^k por $D^k u$, Dv^r por $D^r v$ y en el caso de ser k o r nulo se pondrá u o v en lugar de $D^o u$ y $D^o v$ respectivamente

68.- Ejercicios propuestos:

1.- Derivada n-ésima de la función $f(x) = \dfrac{1}{a + bx}$

2.- Derivada n-ésima de la función $f(x) = \dfrac{1}{a^2 - b^2x^2}$

3.- Derivada n-ésima de la función

$$f(x) = e^{x \cos a} \cos(x \operatorname{sen} a)$$

4.- Derivada n-ésima de la función $f(x) = (1-x^2)^n$

5.- Derivada n-ésima de la función $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$

6.- Derivada n-ésima de las funciones

$$f_1(x) = \operatorname{sen}^2 x \quad \text{y} \quad f_2(x) = \cos^2 x$$

7.- Si f(x) es una función que tiene una derivada f'(x), demostrar que

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{v} \cdot \frac{d^2v}{dx^2}$$

siendo:

$$u = \left[f'(x) \right]^{-\frac{1}{2}} \qquad y \quad v = u\, f(x)$$

8.- Sean $f(a)$ y $\varphi(a)$ dos funciones con derivadas $f'(a)$ y $\varphi'(a)$ demostrar que

$$dx^2 + dy^2 = du^2 + dv^2$$

siendo:

$$x = f(a) - \varphi'(a) \qquad y = \varphi(a) + f'(a)$$

y

$$u = f'(a) \ \operatorname{sen} a - \varphi'(a) \ \cos a$$

$$v = f'(a) \ \cos a - \varphi'(a) \ \operatorname{sen} a$$

9.- Dada la función $f(x)$ y las funciones $\varphi(x)$ y $F(x)$ definidas por las relaciones

$$\varphi'(x) = \frac{k}{f'(x)} \qquad y \qquad F(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$$

demostrar que:

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{2k}{f(x) \cdot \varphi(x)}$$

y

$$\frac{F'''(x)}{F(x)} = \frac{f'''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'''(x)}{(x)}$$

10.- Sabiendo que $y = \frac{1 - x}{1 + x}$, demostrar que:

$$\frac{dx}{\sqrt{x - x^3}} + \frac{dy}{\sqrt{y - y^3}} = 0$$

11.- Sabiendo que $y = \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}}$ demostrar que:

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}} = 0$$

12.- Calcular la derivada n-ésima de la función $f(x) = \text{arc tg } x$, aprovechando la derivación de funciones implícitas.

- o$^{\text{o}}$o -

C A P I T U L O   X

LAS FORMULAS DE TAYLOR Y MACLAURIN.-

69.- Desarrollo de un polinomio.- Sea $P(x)$ un polinomio entero en x, o sea:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

donde a_0, a_1, a_2, ... a_{n-1}, a_n son constantes reales cualesquiera. Si se reemplaza la variable x por $x + h$, siendo h un incremento cualquiera de la variable x, se tiene:

$$P(x+h) = a_0(x+h)^n + a_1(x+h)^{n-1} + \dots\dots$$

$$\dots + a_{n-1}(x+h) + a_n$$

Desarrollando cada término del segundo miembro de acuerdo con la fórmula del binomio y haciendo las reducciones con venientes, se llega a que:

$$P(x+h) = P(x) + \frac{h}{1} P'(x) + \frac{h^2}{2!} P''(x) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} P^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} P^{(n)}(x)$$

Terminaremos esta cuestión sin mayor importancia para nuestros propósitos posteriores, indicando que esta relación obtenida en el álgebra sólo fué recordada en esta ocasión con el objeto de justificar ante los lectores la forma que tiene la fórmula que presentamos y que se conoce con el nombre de Fórmula de Taylor.

70.- Fórmula de Taylor.- Consideremos ahora no ya un polinomio, sino una función $f(x)$ cualesquiera, continua y uniforme la fórmula de Taylor tiene por objeto desarrollar $f(x+h)$ según potencias sucesivas de h hasta un cierto orden n y bajo la forma siguiente:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} M. \qquad (a)$$

Es necesario entonces suponer las derivadas de $f(x)$ finitas y determinadas en el punto x hasta la de orden $(n-1)$ y en tales condiciones esta fórmula define la cantidad M en función de h supuesta diferente de cero. La cantidad h puede tener un signo cualquiera y las derivadas sucesivas de $f(x)$ deben ser únicas en el punto x. Si h es positivo la fórmula supone únicamente la existencia de las derivadas sucesivas de $f(x)$ a la derecha de x. Contrariamente se exigirá las derivadas por la izquierda si h fuera exclusivamente negativo.

Como se vé, de acuerdo con lo precedente, la ley de formación de los términos del desarrollo no es arbitraria. Ella ha sido elegida de modo que el polinomio de grado $(n-1)$ en h.

$$f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)$$

y sus $n-1$ primeras derivadas coinciden respectivamente, para $h = 0$ con $f(x+h)$ y sus $n-1$ primeras derivadas. Además con respecto a la cantidad M podemos indicar que existe un teorema que afirma que cuando h tiende a cero, la cantidad M definida por la fórmula (a) tiende hacia la derivada $f^{(n)}(x)$, finita o infinita, pero supuesta existente.

El último término de la expresión (a) se llama término complementario o resto en la fórmula y suele designarse frecuentemente por $R_n(h)$, de modo que la fórmula (a) puede escribirse:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n(h) \qquad \text{(b)}$$

Así se obtiene una primera expresión para R_n

$$R_n = \frac{h^n}{n!} M.$$

Este primer resultado no dá sin embargo ningún dato preciso sobre la magnitud de R_n para los diferentes valores finitos de h. Es pués necesario buscar nuevas experiencias para R_n capaces de prestar este servicio. Una de estas formas es la conocida con el nombre de resto de Lagrange y el puede obtenerse de una manera simple mediante la aplicación repetida de la Fórmula de Cauchy.

Teorema 119.-

Sea $f(x)$ una función uniforme de x, tal que ella y sus $n-1$ primeras derivadas son continuas en $a \leqslant x \leqslant a+h$, si además existe $f^{(n)}(x)$ en $a<x<a+h$, entonces la expresión:

$$R_n(h) = f(a+h) - f(a) - \frac{h}{1} f'(a) - \frac{h^2}{2!} f''(a) - \ldots$$

$$\ldots\ldots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

es igual a:

$$\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h) \qquad \text{siendo } 0<\theta<1 .$$

D.-

Para demostrar este teorema tomemos la función auxiliar $\varphi(h) = \frac{h^n}{n!}$, es fácil verificar que:

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \ldots\ldots = \varphi^{(n-1)}(0) = 0$$

Además de acuerdo con el valor de $R_n(h)$ indicado en el enunciado del teorema se tiene también:

$$R_n(0) = R'_n(0) = R''_n(0) = \ldots\ldots = R^{(n-1)}(0) = 0$$

Ahora de acuerdo con la fórmula de Cauchy resulta que:

$$\frac{R_n(h)}{\varphi(h)} = \frac{R_n(h) - R_n(0)}{\varphi(h) - \varphi(0)} = \frac{R'_n(h_1)}{\varphi'(h_1)} \qquad \text{siendo} \quad 0<h_1<h$$

análogamente:

$$\frac{R'_n(h_1)}{\varphi'(h_1)} = \frac{R'_n(h_1) - R'_n(0)}{\varphi'(h_1) - \varphi'(0)} = \frac{R''_n(h_2)}{\varphi''(h_2)} \qquad \text{con} \quad 0<h_2<h_1$$

y continuando así se llega a que:

$$\frac{R_n(h)}{\varphi(h)} = \frac{R_n^{(n)}(h_n)}{\varphi^{(n)}(h_n)} \qquad \text{con } 0<h_n<h_{n-1}$$

ahora como en el fondo ocurre que $0<h_n<h$ se puede poner

$$h_n = \theta\, h \qquad \text{siendo} \qquad 0<\theta<1$$

luego:

$$\frac{R_n(h)}{\varphi(h)} = \frac{f^{(n)}(a + \theta h)}{1}$$

y de aquí

$$R_n(h) = \frac{h^n}{n!} \quad f^{(n)}(a + \theta h)$$

71.- Otros restos para la Fórmula de Taylor.- Con las mismas condiciones impuestas en el teorema anterior, pongamos:

$$R_n(h) = h^p P(h)$$

donde $P(h)$ es una función de h por determinar. Pongamos también $b = a+h$ y consideremos la función auxiliar:

$$F(x) = f(x) + (b-x)f'(x)+\ldots+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) +$$

$$+ (b-x)^p \; P(h)$$

Se vé sin dificultad que esta función $F(x)$ satisface todas las condiciones que exige el teorema de Rolle, en efecto:

$F(x)$ es continua para $a \leqslant x \leqslant b$ puesto que es la suma de $n+1$ funciones continuas

$F'(x)$ existe en $a < x < b$, puesto que existe

$f^{(n)}(x)$, finalmente se tiene:

$$F(a) = F(b) \quad ,$$

ya que:

$$F(a) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \dots\dots$$

$$\dots\dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + h^p P(h) = f(a+h)$$

y

$$F(b) = f(b) = f(a+h)$$

De aquí entonces que en virtud del teorema mencionado, existirá entre a y b un punto <u>c</u> tal que $F'(c)=0$. Derivando la función auxiliar se encuentra:

$$F'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) - p(b-x)^{p-1}P(h)$$

de donde:

$$0 = \frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(c) - p(b-c)^{p-1}P(h)$$

y de aquí:

$$P_h = \frac{(b-c)^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}(c)$$

Si tomamos ahora $0<\theta<1$ se tiene $c = a+\theta h$ y como $b = a+h$, resulta $b-c = a+h - a - \theta h = h(1-\theta)$, luego

$$P_n = \frac{h^{n-p}(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta h)$$

valor que sustituído en

$$R_n = h^p P(h)$$

da para R_n

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta h)$$

Esta expresión es conocida con el nombre de resto de Schloemilch. De aquí se deduce sin dificultad dos casos particulares de uso frecuente:

Si $p = n$, se obtiene el resto de Lagrange:

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h)$$

Si $p = 1$, se obtiene el resto de

$$R_n = \frac{h^n(1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta h)$$

72.- Unicidad del desarrollo.- Cuando $f^{(n)}(a)$ es finita, la fórmula de Taylor expresa $f(a+h)$ por un desarrollo de la forma:

$$f(a+h) = A_0 + A_1h + A_2h^2 + \ldots\ldots + A_{n-1}h^{n-1} + Mh^n$$

donde los A_i son constantes respecto de h y donde M es acotada cuando h tiende a cero. Un tal desarrollo no es posible sino de una sola manera por la fórmula de Taylor, en efecto supongamos que existen dos desarrollos análogos del mismo orden, entonces:

$$A_0+A_1h+A_2h^2+ \ldots\ldots + A_{n-1}h^{n-1} + Mh^n =$$

$$= a_0 + a_1h + a_2h^2 + \ldots\ldots + a_{n-1}h^{n-1} + mh^n$$

Puesto que M y m son acotados, haciendo $h = 0$ resulta que $A_0 = a_0$. Suprimiendo estos términos iguales, dividiendo por h y haciendo nuevamente tender h a cero, se obtiene $A_1 = a_1$. En igual forma se continúa hasta agotar el número de términos. Las expresiones precedentes son idénticas y el desarrollo es estonces único.

73.- Diversas expresiones de la fórmula de Taylor: Si en la fórmula establecida

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots\ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h) \qquad (c)$$

reemplazamos h por x-a se tiene:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta\,\overline{x-a}) \qquad (d)$$

Esta fórmula supone $f^{(n-1)}(x)$ continua en él intervalo (a,x) y $f^{(n)}(x)$ determinada en (a,x)

Si en la fórmula

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h)$$

Se resta $f(x)$ de ambos miembros, se obtiene:

$$f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h)$$

Tomemos $h = dx$, los términos sucesivos del segundo miembro sólo se diferencian entonces, de las diferenciales sucesivas de $f(x)$ por los factoriales que los acompañan. En cuanto al primer miembro él es el incremento $\Delta f(x)$ de la función $f(x)$ correspondiente al incremento arbitrario dx de la variable x. Su fórmula precedente se reduce a:

$$\Delta f(x) = \frac{df(x)}{1} + \frac{d^2f(x)}{2!} + \frac{d^3f(x)}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots + \frac{d^{(n-1)}f(x)}{(n-1)!} + \frac{d^nf(x)}{n!} \qquad (e)$$

Ella nos dá la expresión del incremento finito $\Delta f(x)$ por un desarrollo en función de las diferenciales sucesivas de $f(x)$. Es necesario tener presente si, que en el último término se debe reemplazar x por $x + \theta\, dx$.

74.- Fórmula de Maclaurin .- Ella no es otra cosa que un caso particular de la fórmula de Taylor, en efecto haciendo $a = 0$, en la fórmula (d) , se tiene:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots . + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x) \qquad (f)$$

conocida por el nombre de fórmula de Maclaurin con el resto de Lagrange. Los correspondientes restos de Schloemlich y Cauchy se reducen para $a = 0$, respectivamente a:

$$R_n = \frac{x^n(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!} f^{(n)}(\theta x)$$

$$R_n = \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} \quad f^{(n)}(\theta x)$$

La fórmula número (f) supone $f^{(n-1)}(x)$ continua de cero a x y $f^{(n)}(x)$ determinada entre cero y x. El número θ está comprendido entre cero y uno.

75.- Aplicación de la fórmula de Maclaurin a algunas funciones.- a). Consideremos primeramente la función $f(x) = e^x$. Todas las derivadas de esta función son iguales a ella misma. Ellas quedan entonces finitas para todo valor que se atribuya a x, de aquí entonces que ella desea desarrollable mediante la fórmula de Maclaurin, obteniéndose:

$$e^x = 1+\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} \quad e^{\theta x}$$

Particularmente para $x = 1$, se encuentra:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^\theta}{n!}$$

Como el último término puede hacerse tan pequeño como se desee, con tal de hacer n suficientemente grande, se tiene entonces una fórmula que permite calcular el número e con el grado de aproximación que se desee.

Si multiplicamos los dos miembros de la relación precedente por $(n-1)!$ se tiene:

$$(n-1)!\,e = \text{número entero} + \frac{e^{\theta}}{n}$$

y esta igualdad nos prueba que el número e es irracional, pues si e fuese un racional de la forma $\frac{p}{q}$, el primer miembro de la igualdad precedente será entero para $n > q$ en tanto que el segundo es fraccionario para $n > 3$. De aquí entonces que $e \neq \frac{p}{q}$

b). Tomemos ahora la función $f(x) = a^x$, se tiene en este caso que:

$$a^x = e^{xLa} = 1 + \frac{xLa}{1} + \frac{(xLa)^2}{2!} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{(xLa)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(xLa)^n}{n!}\, a^{\theta}$$

c). Veamos esta vez el desarrollo de $f(x) = $ sen x ; hemos establecido que la derivada de orden n de la función $f(x) =$ sen x está dada por la expresión:

$$f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Para $x = 0$, los valores de $f(x)$ y de sus derivadas sucesivas forman una sucesión periódica de período : 0, 1, 0, -1, ; 0, 1, 0, -1; .... lo que nos indica que las potencias de índice par desaparecen. De aquí que considerando el resto de Lagrange, se obtiene:

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} \quad \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2K-1)!} + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cos \theta x$$

d). De una manera idéntica a la precedente se puede desarrollar la función $f(x) = \cos x$, obteniéndose:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \cos \theta x$$

e). Para terminar desarrollaremos la función $f(x) = L(1+x)$; no tomamos la función Lx debido a que nosotros deseamos utilizar la fórmula de Maclaurin y tal función como así también todas sus derivadas se hacen infinitas para $x = 0$.

Ya hemos establecido que:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$$

y haciendo $x = 0$ queda:

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

de donde:

$$L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}(1+\theta x)^{-n}$$

76.- Ejercicios propuestos.-

1.- Desarrollar por la ecuación de Maclaurin ,

$$f(x) = \text{sen}^2 x$$

2.- Desarrollar por la ecuación de Maclaurin ,

$$f(x) = e^x \text{ sen } x$$

3.- Aprovechando el desarrollo de la función seno calcular sen 10° con cinco derivadas.

4.- Aprovechando el desarrollo de la función e^x calcular el número e con cinco decimales exactos.

5.- Calcular aprovechando el desarrollo correspondiente, el valor arc tg $\frac{1}{10}$ en grados minutos y segundos.

6.- Determinar los cuatro primeros términos del desarrollo de la función e^x según potencias de x + 1.

7.- Determinar los cuatro primeros términos del desarrollo de sen (a+x) según potencias de x.

8.- Desarrollar el polinomio:

$5x^4 + 6x^3 - 17x^2 + 18y - 20$ según potencias de x+4 .

9.- Desarrollar la función $+\sqrt{x}$ en la vecindad de $a = 1$.

10.- Desarrollar en serie las funciones $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$.

— oOo —

CAPITULO XI

FORMAS INDETERMINADAS

77.- Definición.- Sea $F(x)$ una función de una variable real que llega a ser indeterminada, para $x = a$, se llama "verdadero valor" de esta función para $x = a$, por definición, el límite hacia el cual tiende la función cuando x tiende hacia a. Se deberá además especificar siempre si x tiende hacia a de una manera cualquiera o solamente por valores mayores que a o bien por valores menores que a.

Así por ejemplo el verdadero valor de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ para $x = 0$ es uno, de cualquiera manera que x tienda hacia cero. El verdadero valor de xLx para $x = 0$, es cero, pero a condición que x tienda a cero permaneciendo siempre positivo, ya que tal función no está definida para $x<0$.

78.- Indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.- Esta forma se encuentra cuando los dos términos de una fracción $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ son funciones continuas que se anulan simultáneamente para $x = a$. El verdadero valor se determina por la aplicación de un teorema importante conocido con el nombre de Teorema del'Hospital que consiste en sustituír la razón de las funciones por la razón de sus derivadas.

Este teorema se presenta bajo diferentes formas más o menos convenientes algunas de las cuáles veremos a continuación:

Teorema 120.-

Sean las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ que se anulan para $x = a$, si $f'(a)$ y $\varphi'(a)$ existen y tienen una razón definida, se verifica que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$$

D.-

En efecto se tiene que:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}}$$

y pasando al límite cuando x tiende hacia a se tiene:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$$

Este teorema se puede generalizar estableciendo que si dos funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ y todas sus derivadas sucesivas hasta la de orden $(n-1)$ se anulan en el punto $x = a$, si además las derivadas de orden n existen en dicho punto y no son ambas nulas ni infinitas, el verdadero valor (finito ó infinito) de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ en el punto $x = a$ es $\frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)}$ o sea:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)}$$

En efecto tenemos que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$$

y como de acuerdo con la fórmula de Taylor se tiene:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^n(a+\theta h)$$

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + \frac{h}{1} \varphi'(a) + \frac{h^2}{2!} \varphi''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} \varphi^{(n)}(a+\theta h)$$

y como las derivadas hasta las de orden $n-1$ son nulas en $x = a$, tenemos:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{\varphi^{(n)}(a+\theta h)} = \frac{f^{(n)}(a)}{\varphi^{(n)}(a)}$$

Este teorema no postula ninguna otra condición que las contenidas en su enunciado. Ella supone a finito y no se extiende al caso en que $a = \pm \infty$. Por otra parte si $\varphi^{(n)}(a) = 0$, ella muestra que el verdadero valor es infinito, pero el signo queda indeterminado. Finalmente el no indica nada si las derivadas no existen en el punto a.

Teorema 121.-

Sean las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ que se anulan en el punto $x = a$. Si $f'(x)$ y $\varphi'(x)$ existen en la vecindad de a aunque no necesariamente en a y si la razón $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ tiende hacia un límite l definido cuando $x \quad a$, entonces el límite de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ existe y es igual.

D.-

De acuerdo con la fórmula de Cauchy si $a<\xi_1<x$, se tiene:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)}$$ y puesto que el límite en cuestión existe, resulta:

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{\xi_1\to a+0} \frac{f'(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)} = \ell$$

Hemos tomado límite por la derecha porque hemos supuesto $x>a$. Si ahora suponemos $x<a$, se tendrá para $a<\xi_2<a$ que:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(a) - f(x)}{\varphi(a) - \varphi(x)} = \frac{f'(\xi_2)}{'(\xi_2)}$$

y tomando límite por la izquierda queda:

$$\lim_{x \to a-0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \quad \lim_{\xi_2 \to a-0} \frac{f'(\xi_2)}{\varphi'(\xi_2)}$$

Este segundo teorema es más útil que el primero, porque deja libertad en la elección del procedimiento a seguir para encontrar el límite del cuociente de las derivadas como ser: supresión de factores comunes, empleo del primer teorema, aplicación repetida del segundo (como lo veremos inmediatamente).

Este teorema está sometido a las mismas condiciones que la fórmula de Cauchy sobre la cual se apoya: 1° las derivadas deben ser determinadas y finitas en la vecindad del punto a (pudiendo exceptuarse el punto mismo). 2° El cuociente $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ debe tomar cuando x tiende hacia a un número finito de veces la forma $\frac{0}{0}$. Ahora si el cuociente $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ no tiene un límite determinado cuando x tiende hacia a no debe creerse que la fracción propuesta no lo tiene, porque en la fórmula de Cauchy el θh de $\xi = a+\theta h$ tiende hacia cero según una ley desconocida, y esta ley puede ser tal que el segundo miembro tenga límite.

Cuando la existencia de las derivadas y las condiciones precedentes subsisten cuando x aumenta indefinidamente, este segundo teorema permanece aplicable en el caso en que a $+\infty$ y en el caso en que a $-\infty$. En efecto en el primer caso por ejemplo se tiene:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{z \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\frac{1}{z}} \qquad \text{siendo } x = \frac{1}{z}$$

la cuestión se reduce así al caso en que a es un valor finito y la aplicación del teorema nos dá:

$$\lim_{z \to +0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} \quad \lim_{z \to +0} \frac{-\frac{1}{z^2}\, f'\left(\frac{1}{z}\right)}{-\frac{1}{z^2}\, \varphi\left(\frac{1}{z}\right)} \quad \lim_{z \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)} \quad \lim_{a \to \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Observación:

Si ocurriera que $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ y $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ asuman la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ cuando $x \longrightarrow a$, la aplicación de la fórmula de Cauchy a la función $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ nos dá :

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \quad \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$$

En general si $f^{(m)}(x)$ y $\varphi^{(m)}(x)$ se anulan para $x = a$, tendremos por aplicación repetida de lo precedente que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)} \qquad \text{con} \qquad n > m$$

78.- <u>Indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$</u>.- El Teorema de l'Hospital se aplica también a la determinación del verdadero valor de fracciones cuyos dos términos crecen indefinidamente en valor absoluto para un valor particular a de la variable x.

Este teorema que supone la existencia de las derivadas (salvo en el punto a), permanece siempre sometida a las mismas restricciones: 1° ella conduce a un resulta do determinado finito o infinito; 2° las derivadas de las dos funciones son finitas y no deben anularse simultáneamente en la vecindad de $x = a$.

Para demostrar esta afirmación, consideremos la fracción $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ y démosnos dos valores x_o y x, suficientemente próximos a $x = a$ para que las dos derivadas $f'(x)$ y $\varphi'(x)$ sean determinadas en su intervalo y no tengan raíces comunes (los dos valores x_o y x estarán a un mismo lado de $x = a$). Nosotros podemos aplicar la Fórmula de Cauchy, así siendo ξ intermediario entre x_o y x, se tiene:

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{\varphi(x) - \varphi(x_o)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \qquad x_o < \xi < x$$

o bien:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_o)}{f(x)}}{1 - \frac{\varphi(x_o)}{\varphi(x)}} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

de donde:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \quad \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \cdot \frac{1 - \frac{\varphi(x_o)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(x_o)}{f(x)}}$$

Supongamos, en primer lugar, que $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ tenga para $x = a$ un límite finito l. Entonces el segundo miembro de la última igualdad puede llevarse tan cerca de l como se quiera, a condición de que x esté suficientemente cercano a $x = a$, ya que permaneciendo x_o fijo al acercarse x hacia a, la segunda fracción del miembro de la derecha tiende hacia la unidad y además se puede tomar ξ tan cercano de a como se quiera, con solo tomar x_o y x suficientemente vecinos de a, así la primera fracción está tan cerca como se desee, de 1. Resulta de todo esto que $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tiene por límite 1 cuando x tiende hacia a, así

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$$

En segundo lugar, si la razón de las derivadas tiende hacia infinito, la fórmula que acabamos de discutir nos muestra que $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ es tan grande como se quería junto con $\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$. El teorema, aún es exacto.

Si $a \to \infty$, el Teorema de l'Hospital aún permanece aplicable a la forma $\infty : \infty$ en las mismas condiciones que la forma 0:0 y la demostración es la misma.

79.- Casos en que la regla de l'Hospital no es aplicable.

Si alguna de las condiciones estipuladas no se verifica, la aplicación inconsiderada de los teoremas conduce a resultados falsos.

1.- Puede ocurrir que la razón de las funciones tenga un límite cuando x tienda hacia a, sin que lo tenga sus derivadas. Tal es el caso presentado en los dos ejemplos siguientes:

Sea $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ y $\varphi(x) = \operatorname{sen} x$, entonces si $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

Veamos ahora que pasa con el límite de la razón de sus derivadas, tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{2x\,\text{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x} = -\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x} =$$

no existe.

Sea ahora:

$$f(x) = x - \text{sen}\, x \qquad y \qquad \varphi(x) = x \text{ , entonces si}$$

$x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \text{sen}\, x}{x} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{1}{z} - \text{sen}\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}} = \lim_{z\to 0} \left(1 - z\,\text{sen}\frac{1}{z}\right) = 1$$

pero para el cuociente de sus derivadas se tiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to\infty} (1 - \cos x) = \text{no existe.}$$

2.- Recíprocamente, la razón de las derivadas puede tener un límite sin que las funciones mismas lo tengan. Este caso es menos frecuente, pero he aquí un ejemplo:

Sea $\quad f(x) = e^{-2x}(\cos x + 2\,\text{sen}\, x)$

y

$$\varphi(x) = e^{-x}(\text{sen}\, x + \cos x) \quad ; \quad x \to \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\ \infty} \frac{e^{-2x}(\cos x + 2\,\text{sen}\, x)}{e^{-x}(\cos x + \text{sen}\, x)} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} \cdot \frac{1+2\,\text{tg}\, x}{1+\text{tg}\, x} =$$

no existe .

contrariamente la razón de sus derivadas:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5e^{-2x}\operatorname{sen}x}{-3e^{-x}\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{2} e^{-x} = 0$$

La regla no es aplicable por que las dos derivadas tienen un factor común, $\operatorname{sen}x$, que se anula una infinidad de veces.

80.- <u>Otras formas de indeterminación</u>.- Las otras formas de indeterminación más importantes son:

$$\infty - \infty \;; \quad 0\cdot\infty \;; \quad 0^0 \;; \quad \infty^0 \;; \quad 1^\infty$$

La primera se presenta cuando los dos términos de la diferencia $f(x) - \varphi(x)$, aumentan indefinidamente para $x = a$; la segunda forma cuando de los factores del producto $f(x)\cdot\varphi(x)$, uno tiende hacia cero y el otro tiende a infinito. Estas dos formas se reducen inmediatamente a las formas $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$ por simples transformaciones algebraicas, escribiendo esas expresiones en forma de fracción.

Sea $f(x) \to 0$ y $\varphi(x) \to \pm\infty$,

entonces;

$$f(x)\cdot\varphi(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} \;;\; \text{expresión de la forma } \frac{0}{0}$$

Si $f(x) \to \pm\infty$ y $\varphi(x) \to \pm\infty$, entonces;

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\varphi(x)}} .$$

En cuanto a las otras tres formas exponenciales de indeterminación, se buscará el verdadero valor de su logaritmo, el cual será de una de las formas ya examinadas.

Sea por ejemplo $f(x)\to 0$; $\varphi(x)\to 0$, entonces

$[f(x)]^{\varphi(x)}$ es de la forma 0^0 ; Sea pués:

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)} , \text{ con } f(x) > 0$$

de aquí:

$$Ly = \varphi(x) L\,[f(x)] = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{L\,f(x)}}$$

expresión de la forma $\frac{0}{0}$, si $Ly \to \ell$, se tiene:

$$\lim\ y = \lim\ [f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\ell} .$$

81.- Utilización de la fórmula de Taylor.- En la mayor parte de los casos donde la indeterminación no desaparece sino después del uso repetido de la regla de l'Hospital , una aplicación juiciosa de la fórmula de Taylor conduce más rápidamente al resultado. He aquí un ejemplo:

$$\text{Determinar:}\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{\operatorname{sen} x - x\cos x}$$

Se obtiene:

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{e^x - 1 - x}{x \operatorname{sen} x}$$

$$\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} = \frac{e^x - 1}{x\cos x + \operatorname{sen} x}$$

$$\frac{f'''(x)}{\varphi'''(x)} = \frac{e^x}{-x\operatorname{sen} x + 2\cos x}$$

de donde:

$$\frac{f'''(0)}{\varphi'''(0)} = \frac{1}{2} \quad \text{que es el límite buscado.}$$

Aprovechando la fórmula de Taylor se tiene:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \quad \frac{\frac{x^3}{6} + \cdots\cdots}{x - \frac{x^3}{6} + \cdots\cdots - x\ \ 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots\cdots} \quad \frac{\frac{x^3}{6} + \cdots\cdots}{\frac{x^3}{3} + \cdots}$$

expresión que tiene por límite $\frac{1}{2}$ cuando x tiende a cero.

82.- Ejercicios propuestos.-

1.- Determinar lo que hemos llamado "verdadero valor" para las siguientes funciones.

$$a(x) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} \qquad \text{en} \quad x = 0$$

$$b(x) = \frac{\operatorname{arc\,cos}(1 - x)}{\sqrt{2x - x^2}} \qquad \text{en} \quad x = 0$$

$$c(x) = \frac{1 - \cos x}{x\, L(1+x)} \qquad \text{en} \quad x = 0$$

$$d(x) = \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x} \qquad \text{en} \quad x = 0$$

$$e(x) = \frac{\operatorname{arc\,sen} x - x}{x - \operatorname{arc\,tg} x} \qquad \text{en} \quad x = 0$$

2.- Determinar los límites de las siguientes funciones y para los valores que se indica.

$$a(x) = \frac{L(1+e^x)}{x} \qquad \text{cuando} \quad x \to \infty$$

$$b(x) = \frac{L(e^x - e^a)}{L(x - a)} \qquad \text{cuando} \quad x \to a$$

$$c(x) = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} \qquad \text{cuando} \quad x \to \frac{\pi}{2}$$

$$d(x) = \frac{L(1-x)}{\cot\,(1-x)} \qquad \text{cuando} \quad x \to 1-0$$

3.- Calcular el límite de las funciones siguientes y para los valores que se indica.

$$a(x) = \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) \operatorname{tg} x \qquad \text{para} \quad x = \frac{\pi}{2}$$

$$b(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} . L\,\frac{1}{x} \qquad \text{para} \quad x = 1$$

$$c(x) = x\, e^{\frac{1}{x}} \qquad \text{para} \quad x = 0+$$

$$d(x) = \operatorname{sen} x \cdot e^{\frac{1}{1-\cos x}} \qquad \text{para} \quad x = 0+$$

$$e(x) = \operatorname{arc\,sen} x \cdot Lx \qquad \text{para} \quad x = 0$$

$$f(x) = Lx \cdot L(1+x) \qquad \text{para} \quad x = 0+$$

4.- Determinar el "verdadero valor" de las siguientes funciones.

$$a(x) = \frac{1}{x^2} - \cot^2 x \qquad \text{en} \quad x = 0$$

$$b(x) = \sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2) \;\ldots\ldots(x+a_n)} - x \qquad \text{en} \quad x = \infty$$

$$c(x) = \frac{1}{1 - \cos x} - \frac{2}{x^2} \qquad \text{en} \quad x = 0$$

$$d(x) = \frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x} + 1)} \qquad \text{en} \quad x = 0$$

5.- Determinar el límite de las funciones siguientes:

$$a(x) = (c\text{-}s\ x)^{\cot x} \qquad \text{cuando} \quad x \to 0$$

$$c(x) = x^x \qquad \text{cuando} \quad x \to 0+$$

$$d(x) = x^{\text{sen } x} \qquad \text{cuando} \quad x \to 0+$$

$$e(x) = (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} \qquad \text{cuando} \quad x \to 1$$

$$f(x) = L\,\frac{1}{x}^{x} \qquad \text{cuando} \quad x \to 0+$$

$$g(x) = (\operatorname{tg} x)^{\cot x} \qquad \text{cuando} \quad x \to \frac{\pi}{2}$$

$$i(x) = (\cot x)^{\frac{1}{L \operatorname{sen} x}} \qquad \text{cuando} \quad x \to 0$$

6.- Demostrar que la función

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$$

tiene límite cuando $x \longrightarrow \infty$, en tanto que la razón entre la derivada del númerador y la del denominador no lo tiene.

7.- Idem para las funciones

$$F(x) = \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{tg} x} \qquad \text{en} \qquad x = 0$$

siendo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x = 0 \\ x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{para} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

8.- Aprovechando la relación

$$1 + x + x^2 + \ldots\ldots\ldots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

calcular la suma de los n primeros números naturales, la suma de sus cuadrados y la de sus cubos.

- oOo -

C A P I T U L O   XII

MAXIMOS Y MINIMOS DE FUNCIONES DE UNA SOLA VARIABLE REAL.

83.- Definición.- Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo cerrado (a,b), sea c un punto de dicho intervalo. Si tomando arbitrariamente un número positivo η, ocurre que:

$$\Delta f = f(x) - f(c)$$

conserva el mismo signo para todos los valores de x tales que $|x-c|<\eta$, entonces se dice que $f(x)$ tiene un valor extremo en el punto $x=c$.

El valor extremo es un máximo si

$$\Delta f = f(x) - f(c) < 0$$

y es un mínimo si

$$\Delta f = f(x) - f(c) > 0$$

Es importante observar que, de acuerdo con estas definiciones, un máximo o un mínimo no es necesariamente el más grande o el más pequeño valor de la función en todo el intervalo donde x varía, sino solamente un mayor o menor valor en un intervalo suficientemente pequeño. Nada impide pués que una función tenga varios máximos y varios mínimos en un intervalo dado.

Teorema 122.-

Si $f'(x)$ existe en (a,b), los puntos en los cuales $f(x)$ tiene valores extremos están entre las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$.

D.-

Si $f(x)$ tiene un mínimo en c, entonces para $h>0$, se tiene:

$$f(c+h) - f(c)>0 \quad , \quad f(c-h) - f(c)>0$$

o sea:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}>0 \qquad \frac{f(c-h) - f(c)}{-h}<0$$

Tomando límite de cada una de estas expresiones cuando h tiende a cero, obtenemos:

$$f'(c)\geqslant 0 \qquad y \qquad f'(c)\leqslant 0$$

o sea

$$f'(c) = 0$$

razonando de igual manera y suponiendo en $x = c$ un máximo, estamos en condiciones de afirmar que si $f(x)$ tiene un valor extremo en $x = c$, entonces $f'(c) = 0$, siempre que $f'(c)$ exista.

84.- Criterio para determinar los valores extremos.-

Teorema 123.-

Sea $f(x)$ una función definida en $a \leq x \leq b$, y sea c un punto de (a,b) tal que:

$$f'(c) = f''(c) = f'''(c) = \ldots\ldots = f^{(n-1)}(c) = 0 ,$$

y

$$f^{(n)}(c) \text{ existe y no es cero}$$

Entonces $f(x)$ no tiene valores extremos en $x = c$, si n es impar. Si n es par, $f(x)$ tiene un máximo en $x = c$ si $f^{(n)}(c) < 0$ o un mínimo si $f^{(n)}(c) > 0$.

D.-

De acuerdo con la fórmula de Taylor, tenemos que:

$$\Delta f = f(c+h) - f(c) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(c+\theta h)$$

donde $f^{(n)}(c+\theta h)$ tiende hacia $f^{(n)}(c)$ cuando h tiende hacia cero. De aquí entonces que la igualdad anterior pueda ponerse en la forma:

$$\Delta f = f(c+h) - f(c) = \frac{h^n}{n!} \left[f^{(n)}(c) + \varepsilon_h \right]$$

donde ε_h tiende a cero junto con h.

Teniendo presente que h puede ser positivo o negativo al tender a cero; cuando n es impar Δf no conserva el mismo signo en ninguna vecindad de c, y así $f(x)$ no tiene un valor extremo en ese punto. Contrariamente si n es par Δf tiene el mismo signo que $f^{(n)}(c)$, de aquí que:

si $f^{(n)}(c) < 0$ hay un máximo en $x = 0$

si $f^{(n)}(c) > 0$ hay un mínimo en $x = 0$

De aquí entonces la regla siguiente:

Para encontrar los valores extremos de una función continua, en un intervalo donde su derivada existe y es finita, se buscan las raíces de esta derivadas. Si $x=a$ es una de ellas, se sustituye en las derivadas sucesivas de $f(x)$, supuestas existentes en $x=a$, hasta encontrar una que no se anule para $x=a$. Si esta derivada es de orden impar, no hay valores extremos en $x=a$; si ella es de orden par, hay un maximo si es negativa y un mínimo si es positiva.

La regla más comunmente conocida es la que corresponde al caso $n=2$, que cuando $f''(c) = 0$ no indica nada. En este caso existe una singularidad que se conoce con el nombre de punto de inflexión, siempre que $f'''(c) \neq 0$

Teorema 124.—

Si $f(x)$ es continua en la vecindad de c , y $f'(x)$ es finita o infinita en la vecindad de c , pero no cero en cualquier subintervalo $(c-h , c+h)$; entonces $f(x)$ tiene un mínimo en c siempre que:

$f'(x) \geqslant 0$ a la derecha de c

y

$f'(x) \leqslant 0$ a la izquierda de c.

$f(x)$ tiene un máximo en c si:

$f'(x) \leq 0$ a la derecha de c

y

$f'(x) \geq 0$ a la izquierda de c .

D.—

Sea h una cantidad positiva, entonces en el intervalo $c < x \leq c+h$ nosotros trataremos de demostrar de acuerdo con la condición $f'(x) \geq 0$, que en este intervalo $f(x)$ es una función creciente. Supongamos entonces que: $c \leq x_1 < x_2 \leq c+h$, de acuerdo con el teorema de los incrementos finitos tenemos:

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1) f'(\xi) \qquad x_1 < \xi < x_2$$

pero como $x_2 - x_1 > 0$ y además $f'(\xi) > 0$ resulta que:

$$f(x_2) \geq f(x_1)$$

de aquí que $f(x)$ sea monótona creciente en el intervalo $(c,\ c+h)$. Queda aún por demostrar que $f(x)$ es constantemente creciente en este intervalo.

Sea (α,β) un subintervalo de $(c,\ c+h)$ y supongase que $f(\alpha) = f(\beta)$; entonces puesto que $f(x)$ es monótona creciente $f(x) = f(\alpha)$ para todos los puntos de (α,β) esto implica que $f'(x) = 0$ en todo el intervalo (α,β), lo cual es contrario a la hipótesis. Luego $f(x)$ es una función constantemente creciente en $c < x \leq c+h$.

Similarmente se demuestra que $f(x)$ es constantemente decreciente en $c-h \leq x < c$.

De aquí entonces que $f(x)$ satisface a las condiciones de un mínimo en $x = c$.

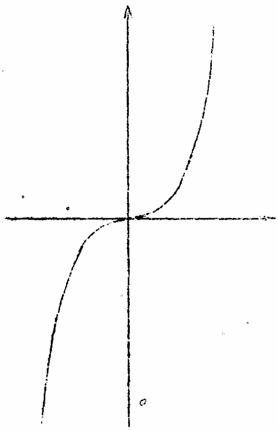
El caso en que $f(x)$ tiene un máximo en c se prueba de la misma manera.

De acuerdo con este teorema puede mencionarse una nueva regla para determinar los valores extremos de una función, regla que en muchos casos puede ser de cierta utilidad, su enunciado es más o menos el siguiente:

Sea $f(x)$ una función que tiene una derivada determinada $f'(x)$ en la vecindad de un punto c (el punto mismo puede hacer excepción). Supongamos que $f'(x)$ tenga en la vecindad del punto c, un signo único para $x<c$ y un signo único para $x>c$. Haciendo pasar x por el valor c, creciendo, se tendrá: 1° un mínimo de $f(x)$ en el punto c si $f'(x)$ pasa de negativo a positivo. 2° un máximo de $f(x)$ en c si $f'(x)$ pasa de positivo a negativo y 3° ni máximo ni mínimo si $f'(x)$ no cambia de signo.

Observación.-

Llamaremos aquí la atención sobre dos puntos importantes que es conveniente comprender bien.



1° La función $f(x)$ no tiene necesariamente un valor extremo en todo punto donde $f'(x) = 0$.

En efecto sea la función:

$$f(x) = x^3$$

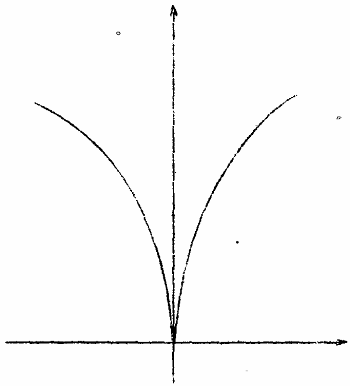
Se tiene entonces que $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$. Sin embargo en el punto $x = 0$ la función considerada no tiene valor extremo ya que:

$$f'''(0) = 6 .$$

La figura adjunta nos muestra la situación considerada gráficamente. El origen 0 es un punto de inflexión. 2° No todos los puntos que dan valores extremos son soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$, puede haber valores extremos en puntos donde $f'(x)$ no existe.

En efecto sea la función:

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$



Gráficamente se observa que en el origen la función tiene un mínimo, sin embargo la derivada de la función en este punto no existe, ya que:

$$f'(0+0) = +\infty$$

$$f'(0-0) = -\infty .$$

es decir $f'(0)$ tiene valores diferentes según que x tienda a cero por la derecha o por la izquierda.

Teorema 125.-

Si $f(x)$ es continua en la vecindad de $x=c$ y $f'(x)$ es finita en dicha vecindad, entonces:

$f(x)$ tiene un mínimo en c, si

$$f'(c+0) = +\infty \quad y \quad f'(c-0) = -\infty .$$

$f(x)$ tiene un máximo en c, si

$$f'(c+0) = -\infty \quad y \quad f'(c-0) = +\infty .$$

D.-

Consideremos el primer caso, si h es un número positivo se tiene:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \infty \qquad y \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(c-h) - f(c)}{-h} = -\infty$$

de modo que existe un número positivo η tal que para $h<\eta$

$$f(c+h) - f(c) > 0 .$$

así $f(x)$ tiene un mínimo en $x = c$. El caso en que $f(x)$ es máximo en $x = c$ se prueba en forma análoga.

85.- Ejercicios resueltos.-

a) Determinar un número x cuya raíz de índice x sea máxima.

La función a quien debe buscársele un máximo es:

$$f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$$

Teniendo presente que los logaritmos crecen al mismo tiempo que los números cuando la base es mayor que 1, la cuestión se reduce a buscar el máximo de la función

$$\varphi(x) = L\, x^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} L\, x \qquad \text{con} \quad x>0$$

se tiene entonces:

$$\varphi'(x) = \frac{1 - Lx}{x^2}$$

Esta derivada se anula para $Lx = 1$, o sea para $x = e$.
Para decidir si hay un máximo o un mínimo derivamos nuevamente, así:

$$\varphi''(x) = \frac{2Lx - 3}{x^3} \qquad \text{de donde } \varphi''(c) = -\frac{1}{e^3} < 0$$

de aquí que para $x = e$, $\varphi(x)$ y por consiguiente $f(x)$ tiene un máximo.

Observación.-

Es conveniente no confundir las expresiones "máximo o mínimo de una función en un punto" con "máximo o mínimo de una función en un intervalo", ya que ambas tienen un significado diferente.

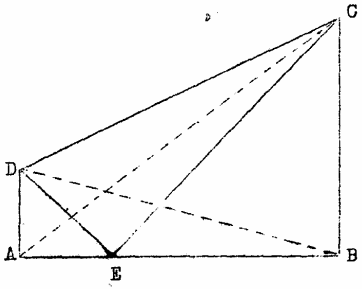
Así por ejemplo la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ definida en el intervalo $(0, 2\pi)$ tiene un máximo en $x = \frac{\pi}{2}$ y un mínimo en $x = \frac{3\pi}{2}$. Ahora si la misma función solo se considera en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ella no tiene ni máximo ni mínimo en ningún punto de $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sin embargo ella tiene en dicho intervalo un valor mayor que todos los otros, 1, y un valor menos que todos los demás, cero.

b) He aquí un ejemplo que ilustra esta observación:

Dado un trapecio rectangular ABCD determinar sobre AB un punto E tal que el triángulo CDE tenga su área maxima o mínima.

Sean: $AB = 1$; $AD = a$; $BC = b$; $AE = x$ Llamando y la superficie del triángulo C D E se tiene:

$$y = k - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{b}b(1-x)$$



siendo k la superficie del trapecio dado.

Reduciendo se tiene:

$$y = \frac{1}{2}(b-a)x + k - \frac{bl}{2}$$

La primera derivada es:

$$y' = \frac{1}{2}(b-a) > 0 \quad \text{siempre que} \quad b > a$$

De aquí entonces que la función considerada no tiene maximo ni mínimo relativo en ningún punto del intervalo de variación de x, es decir $(0,1)$.

Por simples consideraciones geométricas se observa sin dificultad que el triángulo de área menor es el CDA y de área mayor el CDB.

Se trata aquí pués del mayor y menor valor de una función en un intervalo.

86.- Ejercicios propuestos:

1.- Determinar los máximos y mínimos de la función

$$f(x) = x^5 - 75x^3 + 1620x - 1000 .$$

2.- Determinar los máximos y mínimos de la función

$$f(x) = a^{x+1} - a^x - x \text{ , con } a > 0 .$$

3.- Determinar los máximos y mínimos de la función $f(x) = (1+\cos x)\operatorname{sen} x$ en el intervalo $(0, 2\pi)$.

4.- Determinar los máximos y mínimos de la función $f(x) = \cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ en el intervalo $(0, \pi)$.

5.- Examinar en el origen y en cuanto a valores extremos se refiere, la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x = 0 \\ \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} & \text{para } x \neq 0 \end{cases}$$

6.- Idem para la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{para } x \neq 0 \end{cases}$$

7.- Determinar las dimensiones de un cilindro de 1 dm^3 de capacidad, sabiendo que material empleado debe ser mínimo.

8.- Dado un segmento AB y una recta OC perpendicular al segmento en un punto O de su prolongación, determinar desde que punto de OC se vé el segmento AB bajo un ángulo mínimo.

9.- Dado un triángulo ABC se pide determinar en la transversal de gravedad correspondiente al lado AB, un punto M tal que expresión $MA^2 + MB^2 + MC^2$ sea mínima.

10.- Un barco está anclado a 9 km de la costa. Se desea enviar en un tiempo mínimo, un mensajero desde el barco a un campameto situado a 15 km del punto de proyección ortogonal del barco en la costa y a lo largo de la costa. Se pregunta en que punto de la costa debe desembarcar el mensajero si el rema a 4 km/hora y camina a 5 km/hora .

11.- Sabiendo que las flechas que experimenta los diversos puntos una viga empotrada en un extremo, libre en el otro y que soporta una carga concentrada P en su extremo libre, están dadas por la ecuación:

$$y = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2}\,l - \frac{x^3}{6}\right)$$

donde EI es constante y l el largo de la viga, determinar cual es el punto que experimenta el descenso máximo. Comparar el resultado obtenido con la realidad. Discutir.

12.- Determinar los máximos y mínimos de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } = 0 \end{cases}$$

13.- Idem para la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & \text{para } x \neq 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

14.- Dadas las paralelas AB y BC y la secante BC, trazar por D una recta que corte a BC en X y a AB en Y de tal modo que la suma de las áreas de los triángulos BYX y CDX sea mínima.

C A P I T U L O XIII

SERIES INFINITAS

88.- Definición.- Sea $u_1 , u_2 , u_3 , \ldots\ldots , u_n , \ldots\ldots$ una sucesión de números, entonces se llama serie infinita el símbolo:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$$

Con la ayuda de este símbolo así definido, se puede formar una nueva sucesión $[s_n]$ cuyos elementos son las sumas de un número finito de sumandos de la serie definida, así:

$$s_1 = u_1$$

$$s_2 = u_1 + u_2$$

$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Los números s_i los llamaremos sumas parciales de la serie Σu_n.

Definición:

Una serie infinita Σu_n se dice convergente si la sucesión de las sumas parciales $[s_n]$ es convergente. Una serie que no es convergente se dirá divergente.

Si la sucesión $[s_n]$ converge hacia un límite s, este límite lo llamaremos la suma de la serie. La convergencia de una serie hacia un límite s, puede expresarse simbólicamente poniendo:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \quad \text{o bien} \quad |s-s_n| < \varepsilon \qquad \text{para todo } n > N$$

De acuerdo con la definición precedente si una serie Σu_n diverge, debe ocurrir que $s_n \to \pm\infty$ o bien que s_n no posea un límite único, en este último caso la serie se dice oscilante. La oscilación es finita cuando los límites superior e inferior son finitos, la oscilación se dice infinita cuando dichos límites son respectivamente $+\infty$ y $-\infty$.

De la definición misma de convergencia se deduce inmediatamente las siguientes consecuencias:

1.- Si se multiplican todos los términos de una serie por una constante k, diferente de cero, la nueva serie es convergente o divergente según lo sea la prime ra. Cuando la primera es convergente y tiene por suma s la suma de la segunda serie es ks.

2.- No se modifica la convergencia o divergencia de una serie si se cambia el valor de un número finito de términos de ella, pues esto equivale a aumentar o disminuir todas las sumas parciales s_n en una misma cantidad, a partir de cierto rango. Particularmente no se altera la convergencia o divergencia de una serie si se suprime en su comienzo un número finito de términos.

Teorema 126.-

La condición necesaria y suficiente para la convergencia de una serie $\sum u_n$ es que, para todo $\varepsilon > 0$ exista un entero $p > 0$ tal que:

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon \qquad \text{para} \quad n > N$$

Este teorema conocido con el nombre de Teorema de Cauchy ya fué demostrado en el capítulo correspondiente a las sucesiones. De él se desprende como caso particular un teorema de vital importancia en la decisión de la convergencia de series.

Teorema 127.-

Si una serie converge su términino general tiende a cero cuando n tiende a infinito.

D.-

En efecto, si en la condición necesaria y suficiente para la convergencia de una serie, tomamos particúlarmente para p el valor uno, dicha condición se reduce a:

$$|s_{n+1} - s_n| < \varepsilon \qquad \text{para} \quad n > N$$

o sea:

$$|u_{n+1}| < \varepsilon \qquad \text{para} \quad n > N$$

o lo que es lo mismo: u_{n+1} tiende a cero cuando n tiende a infinito.

El teorema recién demostrado entraña una condición necesaria para la convergencia de una serie, pero no suficiente, para probar ésta última afirmación basta con presentar un ejemplo de una serie divergente en la cual el término general tienda a cero.

El ejemplo lo haremos tomando la clásica serie $\sum \frac{1}{n}$, conocida con el nombre de serie harmónica debido a que un término cualquiera de ella es medio harmónico, entre el que le precede y el que le sigue:

Designando con s_n y s_{2n} la suma de los n y de los $2n$ primeros términos de la serie se tiene:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$$

$$s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n}$$

de donde restando:

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n}$$

reemplazando cada término del segundo miembro por $\frac{1}{2n}$

resulta:

$$s_{2n} - s_n > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n}$$

o sea que:

$$s_{2n} - s_n > \frac{1}{2}$$

Ahora demos a n sucesivamente los valores $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots\ldots 2^{p-1}$, se obtiene así:

$$s_2 - s_1 > \frac{1}{2}$$

$$s_4 - s_2 > \frac{1}{2}$$

$$s_8 - s_4 > \frac{1}{2}$$

$$s_{16} - s_8 > \frac{1}{2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_{2^p} - s_{2^{p-1}} > \frac{1}{2}$$

y sumando miembro a miembro

$$s_{2^p} - s_1 > \frac{p}{2}$$

pero teniendo en cuenta que: $s_1 = 1$ resulta finalmente:

$$s_{2^p} > 1 + \frac{p}{2}$$

Desigualdad que nos indica que siempre es posible determinar un número entero p tal que s_{2^p} sobre-pase cualquier número dado por grande que sea. Se ha demostrado entonces que s_n crece indefinidamente junto con n, o sea que a pesar de tender el término general a cero la serie es divergente.

De todas estas consideraciones se deduce el siguiente corolario:

Corolario:
Si en una serie Σu_n el término general no tiende a cero la serie no puede ser convergente.

89.- Series de términos positivos.- Si se desea considerar series cuyos términos tienen todos un mismo signo (positivo o negativo) será suficiente de acuerdo con lo dicho hasta ahora que ellos lo sean a partir de un cierto rango. Además se comprende que bastará con tener en cuenta el caso en que todos los términos sean positivos.

Ahora en una tal serie en que todos los términos son positivos s_n crece cuando n tiende a infinito; si en tal caso la sucesión de las sumas parciales $[s_n]$ es acotada superiormente, por ser ella monótona tiene un límite s; en caso contrario dicha sucesión puede llegar a ser mayor que cualquier número arbitrario, en este último caso $[s_n]$ crece indefinidamente junto con n, o sea la serie es divergente.

Llamaremos criterio de convergencia o de divergencia todo teorema que nos permite decidir la convergencia o divergencia de una serie.

Existen diversos criterios, para determinar si una serie de términos positivos es convergente. A continuación estudiaremos los principales de ellos.

Teorema 128.-

Si la serie $\sum u_n$ es convergente y si todos los términos de otra serie $\sum v_n$ son a partir de cierto rango menores que los términos de la serie $\sum u_n$, la serie $\sum v_n$ es también convergente.

D.-

En efecto sean U_n y V_n las sumas de los n primeros términos de las series $\sum u_n$ y $\sum v_n$, entonces:

$$U_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n$$

$$V_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots + v_n$$

Se puede por supuesto suponer, sin desmerecer la demostración, que la propiedad enunciada en el teorema tenga lugar desde un comienzo. De aquí que para todo n se tendrá:

$$V_n < U_n$$

ahora cuando n tiende a infinito por hipótesis se tiene que $U_n \to U$ por lo tanto

$$V_n < U$$

y siendo la sucesión V_n monótona creciente y acotada superiormente ella tenderá a un límite menor o a lo sumo igual a U.

Por un razonamiento análogo al precedente el lector puede demostrar sin dificultad el teorema siguiente:

Teorema 129.- Si la serie $\sum u_n$ es divergente y si todos los términos de la serie $\sum V_n$ son a partir de cierto rango, mayores que los términos de la serie $\sum u_n$, la serie $\sum u_n$ será divergente también.

Se comprende que para la aplicación práctica de los dos teoremas precedentes será necesario conocer la convergencia o divergencia de algunas series. He aquí algunas de ellas de mucha utilidad.

Consideremos primero la serie:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots + aq^n + \ldots\ldots$$

Para $q \neq 1$ se tiene:

$$\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + \ldots\ldots + aq^{n-1} + \frac{aq^n}{1-q}$$

de donde:

$$s_n = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

Se ve ahora sin dificultad que cuando $|q|<1$, q^n tiende a cero y por consiguiente:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$$

Cuando $q > 1$, q^n no tiende a cero y en tal caso la serie es divergente; finalmente si $q = 1$ la fórmula precedente carece de sentido, sin embargo puede verse que $s_n = na$ lo que basta para comprender que la serie también en este caso es divergente.

Cuando $q = -1$ la serie es oscilante.

Tomemos ahora la serie, conocida a veces con el nombre de **serie potencial**:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots\ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots\ldots$$

Designando con s_n y s_{2n} la suma de los n y de los $2n$ primeros términos de la serie, tenemos:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots\ldots + \frac{1}{n^p}$$

$$s_{2n} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots\ldots + \frac{1}{n^p} + \frac{1}{(n+1)^p} + \ldots + \frac{1}{(2n)^p}$$

restando queda:

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \dots\dots + \frac{1}{(2n)^p}$$

reemplazando cada término del segundo miembro por $\frac{1}{n^p}$ se tiene:

$$s_{2n} - s_n < \frac{1}{n^p} + \frac{1}{n^p} + \dots\dots + \frac{1}{n^p}$$

o sea:

$$s_{2n} - s_n < \frac{1}{n^{p-1}}$$

Dando a n sucesivamente los valores 1, 2, 2^2, 2^3, ... 2^{n-1} se obtiene:

$$s_2 - s_1 < 1$$

$$s_4 - s_2 < \frac{1}{2^{p-1}}$$

$$s_8 - s_4 < \frac{1}{2^{2(p-1)}}$$

$$s_{16} - s_8 < \frac{1}{2^{3(p-1)}}$$

....

$$s_{2^k} - s_{2^{k-1}} < \frac{1}{2^{(k-1)(p-1)}}$$

y sumando estas desigualdades miembro a miembro:

$$s_{2^k} - s_1 < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{2(p-1)}} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{(k-1)(p-1)}}$$

y suprimiendo primeramente $p > 1$, con mayor razón:

$$s_{2^k} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}}$$

Esta desigualdad nos prueba la convergencia de la serie para $p > 1$ ya que para todo n dado existe siempre un número k tal que $2^k > n$.

Para $p = 1$ se tiene la serie harmónica que ya hemos demostrado es divergente. Ahora finalmente si $p < 1$, $\frac{1}{n^p}$ es superior a $\frac{1}{n}$ para todo $n \neq 0$. Los términos de la serie son entonces mayores que los de la serie harmónica y la serie en este caso serán también divergente.

Teorema 130.- Si la razón $\frac{u_n}{v_n}$ tiende hacia un límite finito, diferente de cero, la serie $\sum u_n$ será convergente o divergente según converga o diverja la serie Σv_n .

D.- En efecto si la razón $\frac{u_n}{v_n}$ tiende hacia un límite 1 , dado un $\varepsilon > 0$ existirá un entero N, tal que:

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| < \varepsilon \qquad \text{para todo} \quad n > N$$

o bien:

$$1 - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < 1 + \varepsilon \qquad \text{para todo} \quad n > N$$

de donde:

$$u_n > v_n(1 - \varepsilon)$$

$$u_n < v_n(1 + \varepsilon)$$

Ahora si Σv_n converge, de acuerdo con la segunda de las desigualdades Σu_n también converge, y si Σv_n diverge con la primera de ellas se ve que Σu_n diverge.

Teorema 131.- Sean las series Σu_n y Σv_n , si a partir de cierto rango se tiene:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

la convergencia de la serie Σv_n asegura la convergencia de Σu_n ; contrariamente si ha partir de cierto rango se tiene:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

la divergencia de la serie Σv_n implica la divergencia de Σu_n .

D.- Supongamos que a partir del rango n se verifique la primera hipótesis, entonces:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad \therefore \quad u_{n+1} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} \cdot u_n$$

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \leqslant \frac{v_{n+2}}{v_{n+1}} \quad \therefore \quad u_{n+2} \leqslant \frac{v_{n+2}}{v_{n+1}} \cdot u_{n+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_{n+p-1}} \leqslant \frac{v_{n+p}}{v_{n+p-1}} \quad \therefore \quad u_{n+p} \leqslant \frac{v_{n+p}}{v_{n+p-1}} \cdot u_{n+p-1}$$

de donde se obtiene por multiplicación que:

$$u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \frac{u_n}{v_n}$$

$$u_{n+2} \leqslant v_{n+2} \cdot \frac{u_n}{v_n}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{n+p} \leqslant v_{n+p} \frac{u_n}{v_n}$$

desigualdades que nos indican que ha partir del rango $n+1$ los términos de la serie Σu_n son menores o iguales que los de la serie Σv_n multiplicados por el factor constante de $\frac{u_n}{v_n}$, y como esta serie aún en estas condiciones permanece convergente, la serie Σu_n será convergente también.

La segunda parte de este teorema se demuestra de idéntica manera.

Teorema 132.- (Criterio de D'Alambert).-
Una serie Σu_n de términos positivos es convergente si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha < 1$, siendo α un número fijo. La serie diverge si dicha razón es mayor o igual a la unidad.

D.-
Supongamos primeramente $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha < 1$ para todo n, entonces:

$$\frac{u_n}{u_1} = \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots\cdots \frac{u_3}{u_2} \cdot \frac{u_2}{u_1} < \alpha^{n-1}$$

o sea que: $u_n < u_1 \alpha^{n-1}$ y como la serie

$\sum u_1 \alpha^{n-1}$ es convergente se desprende que la serie $\sum u_n$ también lo será.

Tomemos ahora el caso, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, para todo valor de n , entonces:

$$u_n \geqslant u_{n-1} \geqslant u_{n-2} \geqslant \cdots\cdots\cdots \quad u_1 \geqslant u_1$$

de donde:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots\cdots + u_n \geqslant n u_1$$

y como la serie $\sum n u_1$ es divergente, la serie $\sum u_n$ diverge .

En el teorema precedente para la convergencia de $\sum u_n$ no es suficiente que:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

pues para la serie $\sum u_n = \sum \frac{1}{n}$ se tiene para todo n

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} < 1$$

y sin embargo la serie es divergente.

Corolario:

Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, la serie converge si $l < 1$ y diverge si $l > 1$.

En efecto si $l<1$, se puede elegir un número α, $l<\alpha<1$ tal que para $n>N$ se tenga

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\alpha$$

así la serie Σu_N converge y por lo tanto también la serie Σu_n .

Contrariamente si $l>1$, para todo $n>N$ se tendrá $u_{n+1}>u_n$ y como en tal caso el término general no tiende a cero la serie diverge.

Observación:

Si el límite es igual a la unidad, se puede distinguir dos casos, según que la razón $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tienda hacia uno por valores superiores o por valores inferiores; en el primer caso los términos de la serie son siempre crecientes a partir de cierto N y en tal caso la serie diverge. En el segundo caso nada se puede afirmar respecto de la convergencia o divergencia de la serie.

Teorema 133 (Criterio de Cauchy).-

Una serie Σu_n , de términos positivos es convergente si $\sqrt[n]{u_n}<\alpha<1$, siendo α un número fijo para todo n. La serie diverge si $\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$.

D.-

Sea primeramente $\sqrt[n]{u_n}<\alpha<1$, entonces $u_n<\alpha^n$ y puesto que $\alpha<1$, la serie $\Sigma\alpha^n$ converge y en consecuencia Σu_n es convergente .

Ahora si $\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$, resulta $u_n\geqslant 1$ lo que es suficiente para afirmar que la serie diverge .

Corolario:

Si $\lim \sqrt[n]{u_n} = \ell$, la serie converge si $\ell<1$ y diverge si $\ell>1$.

Tomemos un número $\varepsilon>0$ tal que $\ell+\varepsilon<1$, entonces si $\sqrt[n]{u_n}$ tiende hacia un límite $\ell<1$ se tendrá:

$$|u_n - \ell|<\varepsilon \qquad \text{para todo} \quad n>N$$

o sea:

$$\ell-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<1+\varepsilon \qquad \text{para todo} \quad n>N$$

y como:

$$\ell+\varepsilon<1$$

resulta:

$$\sqrt[n]{u_n}<\ell+\varepsilon<1.$$

Teorema 134.— Si u_n es positivo y si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tiende hacia un límite l entonces $\sqrt[n]{u_n}$ tiende hacia el mismo límite.

D.—

En efecto:

$$\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{u_1}{1}\cdot\frac{u_2}{u_1}\cdot\ \ldots\ \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\cdot\frac{u_n}{u_{n-1}}}$$

además en el capítulo correspondiente a las sucesiones hemos demostrado que si

$\lim a_n = a$, se verifica que $\lim \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} = a$

luego:

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{u_1}{u_1} \cdot \frac{u_2}{u_1} \ldots \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdot \frac{u_n}{u_{n-1}}} = \lim \frac{u_n}{u_{n-1}} = l$$

El teorema recíproco no es verdadero en efecto consideremos serie:

$$1 + a + ab + a^2b + a^2b^2 + \ldots + a^nb^{n-1} + a^nb^n + \ldots$$

donde a y b son números positivos. La razón entre un término y el precedente es alternativamente a y b mientras que $\lim \sqrt[n]{u_n} = ab$.

Teorema 135.- Si apartir de cierto rango, la razón $\dfrac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}$ es constantemente superior a un número fijo $p>1$, la serie es convergente. Si dicha razón es constantemente inferior a un número $p<1$ la serie es divergente .

D.-

Consideremos la primera hipótesis , o sea:

$$\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n} > p > 1 \text{ de aquí resulta } \log \frac{1}{u_n} > p \log n .$$

o sea:

$$\log \frac{1}{u_n} > \log n^p \therefore \frac{1}{u_n} > n^p$$

90.- Método para la formación de series.- Uno de los métodos más simples para determinar la convergencia o divergencia de una serie es por comparación, de aquí entonces la necesidad de conocer el mayor número posible de series tanto convergentes como divergentes. A continuación presentamos un teorema que nos permite construir gran número de series de términos positivos.

Teorema 141.- Sea $[a_n]$ una sucesión que tiende a infinito junto con n, entonces las dos series de términos positivos:

$$(a_2-a_1) + (a_3-a_2) + \ldots\ldots + (a_{n+1}-a_n) + \ldots \quad (a)$$

$$\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)\ldots \quad (b)$$

son respectivamente divergente y convergente.

D.- En efecto la suma de los n primeros términos de la serie (a) es:

$$s'_n = a_{n+1} - a_1$$

y como la sucesión $[a_n]$ es divergente, la sucesión s_n diverge.

Ahora la suma de los n primeros términos de la serie (b) es:

$$s''_n = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n-1}}$$

lo que nos indica que la serie converge hacia $\frac{1}{a_1}$. Esta última parte de este teorema nos permite enunciar el siguiente:

Teorema 142.-

Si el término general u_n de una serie puede ponerse bajo la forma:

$$u_n = f(n) - f(n+1)$$

donde la función $f(n)$ tiene un límite cuando n tiende a infinito, la serie Σu_n es convergente.

D.-

Si designamos con s_n la suma de los n primeros términos de la serie Σu_n, resulta:

$$s_n = [f(1) - f(2)] + [f(2) - f(3)] + \dots + [f(n)-f(n+1)]$$

o sea:

$$s_n = f(1) - f(n+1)$$

y como $f(n+1)$ tiene un límite cuando $n \to \infty$, la sucesión $[s_n]$ es convergente y lo tanto lo es también la serie Σu_n.

Conlcuiremos lo referente a las series de términos positivos formando algunas series, con ayuda del teorema recién demostrado. Estos ejemplos nos mostrarán también, indirectamente, como puede determinarse en algunos casos la suma de una serie.

Como primer ejemplo tomemos la sucesión $[a_n] = [n]$, empleando la fórmula (b) obtenemos la serie:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\ldots\ldots$$

o bien

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\ldots+\frac{1}{(n-1)n}+\ldots\ldots$$

Serie que converge hacia $\frac{1}{a_1}=1$.

Tomemos ahora la sucesión $a_n=\dfrac{1}{\text{arc tg}\,\frac{c}{a+nb}}$

donde a, b, y c son números positivos cualesquiera; empleando la misma fórmula (b) se obtiene:

$$\left(\text{arc tg}\,\frac{c}{a}-\text{arc tg}\,\frac{c}{a+b}\right)+\left(\text{arc tg}\,\frac{c}{a+b}-\text{arc tg}\,\frac{2}{a+2b}\right)+\ldots$$

$$\ldots\ldots+\left(\text{arc tg}\,\frac{c}{a+\overline{n-1}\,b}-\text{arc tg}\,\frac{c}{a+nb}\right)+\ldots\ldots$$

pero como desde la trigonometría se sabe que:

$$\text{arc tg}\,\frac{c}{a+\overline{n-1}b}-\text{arc tg}\,\frac{c}{a+nb}=\text{arc tg}\,\frac{\frac{c}{a+\overline{n-1}\,b}-\frac{c}{a+nb}}{\frac{c^2}{(a+\overline{n-1}b)(a+nb)}}$$

o sea:

$$\text{arc tg}\,\frac{c}{a+\overline{n-1}\,b}-\text{arc tg}\,\frac{c}{a+nb}=\text{arc tg}\,\frac{bc}{(a+\overline{n-1}\,b)(a+nb)+c^2}$$

de donde la serie se reduce a:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{bc}{a(a+b)+c^2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{bc}{(a+b)(a+2b)+c^2} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + \operatorname{arc\,tg} \frac{bc}{(a+\overline{n-1}\,b)(a+nb)+c^2} + \cdots$$

serie que converge a : $\frac{1}{a_0} = \operatorname{arc\,tg} \frac{c}{a}$

En ella puede darse a las cantidades a,b y c los valores que se desee. Si hacemos por ejemplo: $a = b = c = 1$, se obtiene:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} 1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{13} + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n^2+n+1} + \cdots\cdots$$

91.- <u>Series cuyos términos tienen signos cualesquiera</u>: Nos ocuparemos ahora de las series cuyos términos tienen signos cualesquiera. Cuando a partir de cierto rango todos los términos permanecen con el mismo signo, el asunto se reduce al estadio precedente, será suficiente entonces estudiar el curso en que la serie tenga una infinidad de términos positivos y otro tanto de términos negativos. Veremos inmediatamente un teorema que en este caso es fundamental.

Teorema 143.-

Una serie Σu_n, cuyos términos tienen signos cualesquiera, es convergente si la serie formada por los valores absolutos de dichos términos $\Sigma|u_n|$ es convergente. Si además Σu_n converge hacia U, la serie $\Sigma|u_n|$ converge hacia $U \leqslant V$.

D. Se tiene evidentemente que:

$$|U_{n+p} - U_n| \leqslant |V_{n+p} - V_n|$$

Ahora como la serie $\Sigma|u_n|$ es convergente por hipótesis se tiene de acuerdo con el teorema general de convergencia que:

$$|V_{n+p} - V_n| < \varepsilon$$

para todo p entero y positivo; luego:

$$|U_{n+p} - U_n| < \varepsilon$$

y los consiguiente la serie Σu_n converge. Además se tiene:

$$|U_n| \leqslant |u_1| + |u_2| + \ldots\ldots + |u_n| < V$$

luego:

$$|U| \leqslant V .$$

Observación:

El teorema recíproco del precedente no es ver dadero, es decir que si una serie de términos con signos cualesquiera es convergente no se puede asegurar que la serie formada por los valores absolutos de sus términos sea convergente. En efecto, luego veremos que la serie:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots\ldots$$

es convergente y sin embargo la serie formada por sus valores absolutos

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\ldots\ldots$$

sabemos que es divergente.

Definición:

Si una serie Σu_n, cuyos términos tienen signos cualesquiera es tal que la serie $\Sigma|u_n|$ es convergente, se dice absolutamente convergente.

Si la serie Σu_n es convergente y la serie $\Sigma|u_n|$ es divergemte, se dice que la serie Σu_n es semi convergente.

Puesto que una serie formada por los valores absolutos de una serie de términos cualesquiera se identifica con una serie de términos positivos y como es una tal serie hemos demostrado que el orden de los términos puede ser cambiado sin que se altere la convergencia y la suma de la serie, podemos enunciar el teorema siguiente:

Teorema 144.-

En toda serie absolutamente convergente se puede cambiar el orden de los términos sin que se altere la convergencia ni la suma de la serie.

Observación:

Desde el teorema precedente se desprende que toda serie absolutamente convergente, desde el punto de vista del cálculo numérico, puede ser tratada como una suma de un número finito de términos.

Por otra parte conviene hacer notar que si una serie no es absolutamente convergente no existe el derecho de cambiar el orden de sus términos, pues en tales casos una serie convergente puede transformarse en serie divergente o vice-versa, o en otros casos sino se altera la convergencia cambia generalmente la suma. Probaremos esta afirmación presentando un ejemplo clásico.

Tomemos la serie:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\ldots \quad (a)$$

que como ya hemos dicho probaremos más adelante su convergencia. Ordenemos sus términos del siguiente modo:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\ldots\ldots \quad (b)$$

La suma de los $3n$ primeros términos de esta segunda serie es:

$$\sigma_{3n}=\left[1-\frac{1}{2}\right]-\frac{1}{4}+\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right]-\frac{1}{8}+\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right]-\frac{1}{12}+\ldots$$

$$\ldots+\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}\right]-\frac{1}{4n}$$

$$\sigma_{3n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}$$

$$\sigma_{3n} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right]$$

$$\sigma_{3n} = \frac{1}{2}\, s_{2n}$$

designando con s_{2n} la suma de los $2n$ primeros términos de la serie (a). Si esta serie tiene una suma s resulta:

$$\lim \sigma_{3n} = \frac{1}{2} \lim s_{2n} = \frac{1}{2}\, s \,.$$

lo que demuestra que la suma de la serie (b) es igual a la semi-suma de la serie (a).

Teorema 145.- Sea Σu_n una serie de términos positivos convergentes y sea $[a_n]$ una sucesión de números reales, positivos o negativos numéricamente menores que un número fijo k, entonces la serie $\Sigma a_n u_n$ es absolutamente convergente.

En efecto se tiene que:

$$|a_{n+1}\, u_{n+1}| + |a_{n+2}\, u_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}\, u_{n+p}| =$$
$$= |a_{n+1}|\, u_{n+1} + |a_{n+2}|\, u_{n+2} + \cdots\cdots + |a_{n+p}|\, u_{n+p}$$

$$|a_{n+1}\, u_{n+1}| + |a_{n+2}\, u_{n+2}| + \cdots\cdots + |a_{n+p}\, u_{n+p}| <$$

$$k\,(u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots\cdots + u_{n+p})$$

siendo $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos tales que $\sum \frac{1}{a_n}$ es divergente.

D.-

Sin restar generalidad a la demostración supongamos que la primera desigualdad se verifica para $n \geq 1$ entonces tomando $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots n-1$, se tiene:

$$a_1u_1 - a_2u_2 \geq \alpha u_2$$

$$a_2u_2 - a_3u_3 \geq \alpha u_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n-1}u_{n-1} - a_nu_n \geq \alpha u_n$$

de donde sumando miembro a miembro queda:

$$a_1u_1 - a_nu_n \geq (u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n)\alpha$$

de aquí que:

$$\alpha(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n) < a_1u_1 + \alpha u_1 - a_nu_n$$

luego:

$$\alpha s_n < a_1u_1 + \alpha u_1$$

$$s_n < \frac{a_1 + \alpha}{\alpha} u_1$$

lo que nos indica que $[s_n]$ es acotada y como es creciente ella es convergente.

En el caso en que:

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leqslant 0$$

se tiene:

$$a_1 u_1 \leqslant a_2 u_2 \leqslant a_3 u_3 \leqslant \dots\dots\dots \leqslant a_n u_n$$

de donde:

$$u_n \geqslant a_1 u_1 \frac{1}{a_n} .$$

luego:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n \geqslant a_1 u_1 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{a_n}$$

pero como por hipótesis la serie $\frac{1}{a_n}$ es divergente, resulta Σu_n diverge también.

Corolario:

Si $\varphi(n)$ tiene un límite cuando n tiende a infinito, la serie Σu_n converge si dicho límite es mayor que cero y diverge si es menor que cero .

Observación:

Para la demostración de la primera parte de este teorema no es necesario que $\Sigma \frac{1}{a_n}$ sea divergente, basta que $[a_n]$ sea positiva.

Particularmente si se hace $a_n = 1$, se obtiene:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \geqslant \alpha \quad \therefore \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} \geqslant \alpha + 1 \quad \therefore \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{1+\alpha} < 1.$$

es decir el criterio de D'Alambert.

Teorema 137 . (Criterio de Raabe)

La serie Σu_n de términos positivos converge si

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > \alpha > 1$$

y diverge si

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1.$$

D.-

Este teorema se deduce inmediatamente del criterio de Kummer, en efecto basta hacer en $\varphi(n)$, $a_n = n$

Particularmente se tiene que la serie Σu_n converge o diverge según que el límite de

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$$

sea mayor o menor que la unidad.

Teorema 138.- (Criterio de Gauss).-

Si la serie $\sum u_n$, de términos positivos, es tal que:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{h}{n} + \frac{A(n)}{n^2}$$

donde $A(n)$ es una función acotada de n, entonces la serie $\sum u_n$ converge si $h>1$ y diverge si $h\leq 1$.

D.-

La demostración de este teorema se desprende también del criterio de Kummer, en efecto considerando el caso $h \neq 1$, hagamos $a_n=n$, resulta:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n\frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n\frac{u_n}{u_{n+1}} - n - 1\right)$$

y aprovechando la hipótesis se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n\frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[n\left(1 + \frac{h}{n} + \frac{A(n)}{n^2}\right) - n - 1\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n\frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(h-1 + \frac{A(n)}{n}\right) = h-1$$

ahora si $h>1$ resulta $h-1>0$ y la serie es convergente, si $h<1$, resulta $h-1<0$ y la serie es divergente.

Para decidir el caso en que $h=1$, emplearemos también el criterio de Kummer tomando $a_n=n\ln n$, pues más adelante demostraremos que $\sum \frac{1}{n\ln n}$ es divergente (párrafo 93). De modo que:

$$a_n\frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = n\ln n\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{A(n)}{n^2}\right) - (n+1)\cdot L(n+1)$$

$$a_n\frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = n\ Ln + Ln + \frac{A(n)Ln}{n} - (n+1)\ L\ (n+1)$$

$$a_n\ \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = (n+1)L\frac{n}{n+1} + \frac{Ln}{n}\ A(n)$$

$$a_n\frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = (n+1)L\left[1-\frac{1}{n+1}\right]+\frac{Ln}{n}A(n)$$

$$a_n\frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = -\ L\left[1-\frac{1}{n+1}\right]^{-(n+1)} + \frac{Ln}{n}A(n)$$

luego:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n\ \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right) = -1<0$$

lo que nos indica que en tal caso la serie es divergente.

Teorema 139 (Criterio de Bertrand).- Si la serie Σu_n, de términos positivos es tal que:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{h}{nLn}$$

ella es convergente si $h > 1+\alpha$, siendo α un número fijo positivo, y ella es divergente si $h < 1$.

D.-

En la demostración de este teorema emplearemos el criterio de Kummer, tomando $a_n = nLn$, así resulta:

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = nLn\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{h}{nLn}\right] - (n+1)L(n+1)$$

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = n\ Ln + Ln + h - (n+1)L(n+1)$$

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = h + (n+1)\ L\ \frac{n}{n+1}$$

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = h - L\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}$$

de donde:

$$\lim_{n \to \infty} \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right) = h-1$$

ahora si $h > 1 + \alpha$

$$\lim_{n \to \infty} \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right) = \alpha > 0$$

y si $h \leqslant 1$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n\frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right) < 0$$

o sea en el primer caso la serie converge y en el segundo diverge.

Teorema 140.-

Si los términos de una serie convergente de términos positivos, son dispuestos en otro orden, la series permanece convergente y su suma inalterada.

D.-

Consideremos la serie Σu_n convergente y de términos positivos, alteremos el orden de sus términos ordenándolos de una manera cualquiera. Denotemos la nueva serie así obtenida por v_n de tal modo que todo u es un v y todo v es un u. Sea además:

$$U_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n$$

$$V_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots + v_n$$

Supongamos ahora que los n primeros términos de Σu_n esten entre los m primeros términos de la serie Σv_n y que además los m primeros términos Σv_n esten entre los $n+p$ primeros términos de Σu_n, se tendrá entonces:

$$n \leqslant m \leqslant n+p$$

y por consiguiente:

$$U_n \leqslant V_m \leqslant U_{n+p}$$

Ahora se tiene que $\lim U_n = \lim U_{n+p} = U$, de aquí que la serie $\sum v_n$ sea convergente y tienda al mismo límite que $\sum u_n$.

Observación:

Se puede también, en una serie convergente de términos positivos agrupar términos de una manera arbitraria, es decir formar una nueva serie donde cada término sea igual a la suma de un cierto número de términos de la primera, sin cambiar la suma de la serie. Supongamos que se agrupan los términos consecutivos de la serie $\sum u_n$, formándose la serie:

$$M_1 + M_2 + M_3 + \ldots\ldots + M_m + \ldots\ldots$$

en donde:

$$M_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_p$$

$$M_2 = u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots\ldots + u_q \quad , \text{ etc.}$$

La suma Ω_n de los n primeros términos de la serie $\sum M_n$ es igual a la suma U_m de los m primeros términos de la serie $\sum u_n$ para $m > n$. Ahora cuando n aumenta indefinidamente lo mismo ocurre con m y por lo tanto la sucesión Ω_n converge hacia el límite U .

Combinando las dos operaciones precedentes, se ve que toda serie convergente de términos positivos, se puede sin alterar su suma, reemplazarla por otra serie donde cada término está formado por la suma de un cierto número de términos de la primera tomados en un orden cualquiera. Es suficiente que cada término de la primera serie entre en uno y solamente en uno de los grupos de términos que forman la segunda serie.

y como la serie $\sum u_n$ es convergente se puede hacer:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots + u_{n+p} < \frac{\varepsilon}{k}$$

de donde:

$$|a_{n+1}\, u_{n+1}| + |a_{n+2}\, u_{n+2}| + \ldots\ldots + |a_{n+p}\, u_{n+p}| < \varepsilon$$

es decir la serie $\sum a_n u_n$ es absolutamente convergente.

Definición:

Una serie cuyos términos son alternativamente positivos y negativos:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots\ldots\ldots$$

se llama serie alternante.

Teorema 146.-

Una serie alternante es convergente si su término general tiende a cero y si cada término es numéricamente menor que su precedente.

Se tiene que:

$$s_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots\ldots + (u_{2n-1} - u_{2n}) \quad (a)$$

igualdad que también puede escribirse en la forma:

$$s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots\ldots - u_{2n} \quad (b)$$

Ahora como $(u_1 - u_2)$, $(u_2 - u_4)$, ...

que podría llamarse álgebra de las series, debido a la analogía que existe, como lo veremos, entre las operaciones fundamentales de la aritmética y los conceptos que pasamos a definir:

Definición:

Dadas las series Σu_n y Σv_n llámase suma de ellas la serie:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (u_n + v_n)$$

y llánase producto de ellas la serie:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots\cdots+u_{n-1}v_2+u_nv_1) = \sum_{n=1}^{n=\infty} p_n$$

Teorema 147.-

Si Σu_n y Σv_n son dos series convergentes, su serie $\Sigma(u_n+v_n)$ converge hacia la suma de las sumas de dichas series.

D.-

Sean U_n y V_n las sumas parciales de las series Σu_n y Σv_n respectivamente, se comprende sin dificultad que $[U_n+V_n]$ serán las sumas parciales de la serie $\Sigma(u_n+v_n)$ y como:

$$\lim (U_n+V_n) = \lim U_n + \lim V_n$$

queda demostrado el teorema.

Teorema 148.-
Si las series de términos positivos $\sum u_n$ y $\sum v_n$ son convergentes, su producto $\sum p_n$ converge al producto de las sumas de ellas.

D.-
Designemos con U_n, V_n y P_n la suma de los n primeros términos de las series $\sum u_n$, $\sum v_n$ y $\sum p_n$ respectivamente. Se tiene entonces que:

$$P_{2n} - U_nV_n = u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_2)+\dots+(u_1v_{2n}+u_2v_{2n-1}+\dots\dots$$

$$\dots+u_{2n-1}v_2+u_{2n}v_1)-(u_1+u_2+u_3+\dots+u_n)(v_1+v_2+v_3+\dots+v_n) .$$

y notando que todos los términos del tipo u_iv_j con i y $j = 1,2,3,\dots\dots(n-1),n$ se anulan resulta:

$$P_{2n}-U_nV_n=u_1v_{n+1}+(u_1v_{n+2}+u_2v_{n+1})+\dots\dots+(u_1v_{2n}+u_2v_{2n-1}+\dots$$

$$\dots\dots+u_nv_{n+1})+u_{n+1}v_1+(u_{n+2}v_1+u_{n+1}v_2)+\dots+(u_{2n}v_1+u_{2n-1}v_2+\dots$$

$$\dots+u_{n+1}v_n)$$

lo que puede escribirse como sigue:

$$P_{2n}-U_nV_1=u_n(v_{n+1}+v_{n+2}+\dots+v_{2n})+u_2(v_{n+1}+v_{n+2}+\dots+v_{2n-1})+\dots$$

$$\dots+u_nv_{n+1}+v_1(u_{n+1}u_{n+2}+\dots+u_{2n})+v_2(u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{2n-1})+\dots$$

$$\dots\dots+v_nu_{n+1}\ .$$

de aquí entonces que siendo las series Σu_n y Σv_n de términos positivos, se tenga:

$$P_{2n}-U_nV_n<(u_1+u_2+\dots+u_n)(v_{n+1}v_{n+2}+\dots\ v_{2n})+$$

$$+(v_1+v_2+\dots+v_n)(u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{2n})$$

Pero por otra parte si U y V son las sumas de las series Σu_n Σv_n, se tiene para todo n, que:

$$u_1+u_2+\dots\dots+u_n<U \quad y \quad v_1+v_2+\dots+v_n<V.$$

luego:

$$P_{2n}-U_nV_n<U(v_{n+1}+v_{n+2}+\dots+v_{2n})+V(u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{2n})$$

pero debido a la convergencia de las series, tomado un número arbitrario $\varepsilon>0$, existe un número N_1 tal que para todo $n>N_1$ se tiene:

$$v_{n+1}+v_{n+2}+\dots+v_{2n}<\frac{\varepsilon}{4U} \quad y \quad u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{2n}<\frac{\varepsilon}{4V}$$

de donde:

$$P_{2n} - U_nV_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ahora teniendo en cuenta que:

$$\lim U_nV_n = U \cdot V$$

se comprende que puede elegirse un N_2 tal que para todo $n > N_2$ se tenga

$$UV - U_nV_n < \frac{\varepsilon}{2} .$$

de donde podemos afirmar que para todos los n mayores que el mayor de los N_1 y N_2 se tendrá:

$$P_{2n} - UV < \varepsilon$$

lo que nos indica que la serie Σp_n es convergente y tiene como suma el producto de las sumas de las series Σu_n y Σv_n .

Teorema 149.- Si las series Σu_n y Σv_n son absolutamente convergentes su producto Σp_n es absolutamente convergente y tiene por suma el producto de las sumas de las series Σu_n y Σv_n .

D.- En efecto repitiendo el procedimiento desarrollado en la demostración del teorema precedente e indicando $\overline{U}_n$, $\overline{V}_n$ y $\overline{P}_n$ las expresiones análogas de U_n, V_n y P_n; pero constituídas sustituyendo los términos u_n y v_n por $|u_n|$ y $|v_n|$ se tendrá:

$$|P_{2n} - U_n V_n| \leqslant \overline{P}_{2n} - \overline{U}_n \overline{V}_n$$

Pero debido a la convergencia absoluta de las series, las consideraciones indicadas en la demostración del teorema precedente se pueden aplicar a las series $\Sigma|u_n|$ y $\Sigma|v_n|$, de aquí que para un n suficientemente grande.

$$\overline{P}_{2n} - \overline{U}_n \overline{V}_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

luego

$$|P_{2n} - U_n V_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Además para un n suficientemente grande

$$|U_n V_n - UV| < \frac{\varepsilon}{2}$$

de donde

$$|P_{2n} - UV| < \varepsilon$$

lo que demuestra el teorema.

a) Estudiar la serie $L(1+a^n)$ con $0< a<1$

Tomemos la serie auxiliar $\Sigma v_n = \Sigma a^n$, entonces como

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{L(1+a^n)}{a^n} = \lim \; L(1+a^n)^{\frac{1}{a^n}} = Le = 1$$

vemos que la serie Σu_n y Σv_n son de la misma naturaleza y como la última nombrada es convergente igual cosa o cirre con la serie propuesta.

b) Dada la sucesión $[a_n]$ de términos positivos, demostrar que si $\frac{La_n}{n}$ permanece inferior a un número negativo para todo a_n desde $n> N$, ocurre que la serie Σa_n converge. Si $\frac{La_n}{n}$ permanece siempre positivo la serie es divergente.

En efecto supongamos

$$\frac{La_n}{n} < -p \qquad \text{entonces} \quad \sqrt[n]{a_n} < e^{-p} < 1$$

ahora si

$$\frac{La_n}{n} > 0 \qquad \text{resulta} \quad La_n > 0 \quad \text{y luego} \quad a_n > 1$$

c). Dada la serie de términos positivos Σa_n, si ocurre que:

$$\frac{La_n}{Ln} > -1 \qquad \text{la serie diverge}$$

$$\frac{La_n}{Ln} < -p < -1 \qquad \text{la serie converge}$$

En efecto de la relación

$$\frac{La_n}{Ln} < -p \qquad \text{se sigue} \qquad La_n < L\frac{1}{n^p}$$

y luego

$$a_n < \frac{1}{n^p}$$

Ahora si ocurre que

$$\frac{La_n}{Ln} > -1 \quad \text{se sigue} \quad La_n > L\frac{1}{n} \quad \text{y luego} \quad a_n > \frac{1}{n}$$

Se comprende que si el límite de la razón $\frac{La_n}{Ln}$ es mayor que -1 la serie diverge y si dicho límite es menor que -1 la serie converge.

d) Demostrar que la condición necesaria y suficiente para la serie cuyo término general es:

$$u_n = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots\ldots + a_p}{n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots\ldots + a_q} \qquad \text{con } p \text{ y } q \text{ enteros}$$

sea convergente es que $p \leqslant q-2$.

Para demostrar esta afirmación tomemos la serie auxiliar $v_n = \dfrac{n^p}{n^q}$, entonces se tiene:

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{1 + \dfrac{a_1}{n} + \dots\dots + \dfrac{a_p}{n^p}}{\dfrac{b_1}{n} + \dots\dots + \dfrac{b_q}{n^q}} = 1$$

lo que indica que las series Σu_n y Σv_n son de la misma naturaleza. Ahora

$$v_n = \frac{n^p}{n^q} = \frac{1}{n^{q-p}}$$

y como la condición necesaria y suficiente para la convergencia de esta serie Σv_n es $q-p>1$, resulta que la condición necesaria y suficiente para la convergencia de la serie Σu_n es que $q-p \geqslant 0$ ó sea $p \leqslant q-2$ ya que p y q son enteros.

e) Demostrar que, si $\varphi(n)$ es una función positiva decreciente de n y a un entero positivo mayor que uno, entonces las dos series $\varphi(n)$ y $\Sigma a^n \varphi(a^n)$ son ambas convergentes o divergentes,

Para demostrar este teorema agrupemos los términos de la serie $\varphi(n)$ como sigue:

$$[\varphi(1) + \varphi(2) + \dots\dots\dots + \varphi(a)] +$$

$$[\varphi(a+1) + \varphi(a+2) + \dots\dots + \varphi(a^2)] +$$

$$+ \left[\varphi(a^2+1) + \varphi(a^2+2) + \ldots\ldots + \varphi(a^3)\right] +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \left[\varphi(a^{n-1}+1) + (a^{n-1}+2) + \ldots\ldots + \varphi(a^n)\right] + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Designemos con S_n la suma de los términos que forman el grupo de rango n. Puesto que el número de estos términos es $a^n - a^{n-1}$ y como la función $\varphi(n)$ es decreciente se tiene:

$$(a^n - a^{n-1})\,\varphi(a^n) \leq S_n \leq (a^n - a^{n-1})\,\varphi(a^{n-1})$$

o sea

$$\frac{a-1}{a} \cdot a^n\,\varphi(a^n) \leq S_n \leq (a-1)\;a^{n-1}\,\varphi(a^{n-1})$$

Esta doble desigualdad nos muestra que si la serie $\Sigma a^n\,\varphi(a^n)$ es convergente también lo es la serie ΣS_n y por consiguiente la serie $\Sigma\,\varphi(n)$. Contrariamente si la serie $\Sigma\, a^n\,\varphi(a^n)$ es divergente otro tanto ocurre con la serie $\Sigma\,\varphi(n)$. Finalmente como toda serie de términos positivos es convergente o divergente resulta pues que las series $\Sigma\varphi(n)$ y $\Sigma\, a^n\,\varphi(a^n)$ son ambas convergentes o divergentes.

f) Demostrar que la serie $\Sigma\,\dfrac{1}{n(\ln)^p}$ es convergente cuando $p>1$ y divergente si $p\leq 1$.

De acuerdo con el ejercicio precedente estamos en condiciones de asegurar que la serie propuesta converge o diverge según converja o diverja la la serie cuyo término general es:

$$a^n \frac{1}{a^n(La^n)^p} = \frac{1}{(La^n)^p} = \frac{1}{(nLa)^p} = \frac{1}{(La)^p} \cdot \frac{1}{n^p}$$

y puesto que $(La)^p$ es constante vemos que la serie converje si $p>1$ y diverje si $p\leq 1$.

g) Estudiar la serie $\sum \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots\ldots 2n}$.

se tiene que:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{2n+2}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n(2n+1)}$$

o sea:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{n} + \frac{\frac{-1}{4+\frac{2}{n}}}{n^2}$$

y como $A(n)$ es acotado y además $h = \frac{1}{2}$ de acuerdo con el criterio de Gauss se vé que la serie es divergente.

h) Demostrar la convergencia de la serie $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ y calcular su suma .

La aplicación del criterio de D'Alambert es ineficaz, aplicando el Criterio de Raabe se encuentra

$$n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] = n\left[\frac{n+3}{n} - 1\right] = n+3-n = 3$$

resultado que no asegura la convergencia de la serie.

Para el cálculo de su suma basta observar que:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

de donde:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots\cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4}\right) + \left(\frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5}\right) + \cdots\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\cdots\cdots + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

y luego:

$$\lim S_n = \frac{1}{4}$$

94.- Ejercicios propuestos.-

1.- Establecer la convergencia de las siguientes series.

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}} \; ; \; \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{1+n^2} \; ; \; \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{(Ln)^n}$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n!}{n^n} \; ; \; \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{(Ln)^{Ln}} \; ; \; \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\sqrt{n}} \; ; \; \sum_{n=1}^{n=\infty} L\left(1+\frac{1}{n^2}\right); \; \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n} \cdot L\frac{n+1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{n}{n+2}\right]^{n^2} \; ; \; \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{Ln}{n^2} \; ; \; \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}\right]$$

2.- Establecer la divergencia de las siguientes series

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \; ; \; \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \; ; \; \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\;.....\;(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\;.....\;2n}$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+n}} \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{na+b}{na+c}\right]^n \qquad \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{n}{1+Ln}$$

3.- Demostrar que si la serie Σu_n es convergente, converge también la serie Σu_n^2.

4.- Demostrar que si la serie Σu_n es convergente, también lo es la serie $\Sigma \frac{u_n}{1+u_n}$

5.- Demostrar que si la serie Σu_n es convergente, también converge la serie $\Sigma \frac{u_n}{n}$.

6.- Si $[v_n]$ es una sucesión nula con $v_n > 0$, entonces las series v_n y $L(1+v_n)$ son de la misma naturaleza.

7.- Demostrar que la serie $\Sigma \frac{1}{(\mathrm{Ln})^p}$ es divergente para todo p.

8.- Demostrar la convergencia de la serie $\Sigma \frac{\mathrm{Ln}}{n^2}$.

9.- Estudiar la serie $\Sigma \frac{\mathrm{Ln}}{n^p}$

10.- Justificar la convergencia de la serie $\Sigma \frac{n^3-1}{n^5+2}$ y la divergencia de la serie $\Sigma \frac{n+1}{3n^2-1}$

11.- Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\beta}{n}\right)\right]^n$ siendo $0 < \alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$

12.- Estudiar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\beta}{n}\right)\right]^n$ siendo siendo $0 \leq \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

13.- Estudiar la serie $\sum \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}$

14.- Estudiar la serie $\sum \frac{(n-1)\sqrt[3]{n^5+2}}{(n^3-4n+1)\sqrt{n^3+1}}$

15.- Estudiar la serie $\sum \frac{n+1}{a+\sqrt{n^3}}$.

16.- Estudiar la serie $\sum \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$

17.- Estudiar la serie $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ con $p>0$

18.- Estudiar la serie $\sum \frac{\cos n\alpha}{2^n}$.

19.- Estudiar la serie $\sum \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{n!}$

20.- Estudiar la serie $\sum \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$

21.- Calcular la suma de la serie $\sum \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

22.- Calcular la suma de la serie $\sum \frac{n(n+1)}{3^n}$

23.- Calcular la suma de la serie $\sum \frac{1}{n(n+a)}$

24.- Calcular la suma de la serie $\sum \frac{n^2}{n!}$

25.- Calcular la suma de la serie $\sum \frac{2n+3}{(n-1)n(n+2)}$

95.- Serie de funciones - Convergencia uniforme.- Llamamos serie de funciones a la expresión:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) \dots$$

donde $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$, ... etc. son funciones de la variable x definidas en un mismo intervalo (a,b). Un intervalo I se dirá intervalo de convergencia de la serie $\sum f_n(x)$ si en todo punto de él (pudiendo exceptuarse los extremos) Las funciones $f_n(x)$ son definidas y las series $\sum f_n(x)$ convergentes.

Dada una serie de funciones $\sum f_n(x)$ convergente en un intervalo (a,b), puesto que a cada valor de x en (a,b) corresponde otro número, suma de la serie, se comprende que ella define una función de x en el intervalo (a,b), ésta función la denotaremos por el símbolo $S(x)$. Análogamente designemos con $s_n(x)$ la función definida en el intervalo (a,b) por el conjunto de valores que toma la suma de los n primeros funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ para los diferentes valores de la variable x.

Una serie de funciones $\Sigma f_n(x)$ se dirá convergente para un determinado valor de x si tomado arbitrariamente un número $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un entero positivo N tal que para todo $n > N$ se tenga:

$$|S(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

Es frecuente reemplazar $S(x) - s_n(x)$ por $r_n(x)$ con lo cual la condición precedente se reduce a

$$\text{ĺm} \quad r_n(x) = 0$$

Es conveniente notar que de la definición de convergencia que hemos dado, el número N que en ella interviene no solo depende de la magnitud de ε sino también del punto x considerado. Para ilustrar esta importante observación consideremos la serie:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \cdots\cdots + \frac{x}{(\overline{n-1}x+1)(nx+1)} + \cdots\cdots$$

definida en el intervalo cerrado $(0,1)$. El n-ésimo término de la serie se puede escribir en la forma.

$$\frac{x}{(\overline{n-1}x+1)(nx+1)} = \frac{1}{\overline{n-1}x+1} - \frac{1}{nx+1}$$

de donde la serie puede ponerse

$$\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{\overline{n-1}x+1} - \frac{1}{nx+1}\right) + \cdots\cdots$$

y luego la suma de sus n primeros términos se expresa por

$$s_n(x) = 1 - \frac{1}{nx+1} = \frac{nx}{nx+1}$$

de donde

$$S(x) = \lim s_n(x) = \frac{nx}{nx+1} = 1 \quad \text{si} \quad x \neq 0$$

De modo que para $x \neq 0$ se tiene:

$$r_n(x) = S(x) - s_n(x) = 1 - \frac{nx}{nx+1} = \frac{1}{nx+1}$$

Pasemos ahora a determinar un N correspondiente a un $\varepsilon > 0$ tomado, de tal modo que para todos los $n > N$, se tenga

$$|r_n(x)| < \varepsilon$$

puesto que

$$r_n(x) = \frac{1}{nx+1}$$

la condición precedenete se reduce a

$$\frac{1}{nx+1} < \varepsilon$$

o sea a

de donde la condición $r_n(x) < \varepsilon$ se reduce a:

$$\frac{x_a}{1+nx} < \varepsilon$$

y finalmente

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{x}$$

relación que muestra que el conjunto de los N permanece acotado para los valores de x en el intervalo $0 < x \leq 1$ en efecto. $N = 100$ satisface la desigualdad precedente con $\varepsilon = 0.01$ y para cualquier x del mencionado intervalo.

Resumiendo entonces las consideraciones precedentes vemos que en algunas series de funciones el entero N depende de los valores que tome la variable x y en otros dicho entero es independiente de estos valores. Por esta razón nosotros introduciremos un concepto nuevo: el concepto de continuidad uniforme, mediante la definición siguiente:

Definición:

La serie de funciones $\Sigma f_n(x)$ definida en un intervalo (a,b) se dirá uniformemente convergente en este intervalo si para cualquier $\varepsilon > 0$ arbitrario que se tome existe un entero positivo N , independiente de x y tal que:

$$|S(x) - s_n(x)| < \varepsilon \qquad \text{para todo} \quad n > N$$

Teorema 150.-

Sea la serie de funciones $\Sigma f_n(x)$ definida en el intervalo (a,b) con todas las $f_i(x)$ continuas en dicho intervalo. Si la serie es uniformemente convergente en (a,b) entonces la suma de la serie es también función continua de x en (a,b).

D.-

Designemos con $S(x)$ la suma de la serie, entonces será suficiente demostrar que:

$$|S(x+h) - S(x)| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad |h| < \eta$$

siendo x_1 y x_1+h dos puntos del intervalo (a,b). Para ello tenemos:

$$|S(x+h)-S(x)| = \left|[S(x+h)-s_n(x+h)] + [s_n(x+h)-s_n(x)] + \right.$$
$$\left. + [s_n(x)-S(x)]\right|$$

de donde:

$$|S(x+h)-S(x)| \leq |S(x+h)-s_n(x)h)| = |s_n(x+h)-s_n(x)| + |s_n(x)-S(x)$$

pero como por hipótesis se tiene que la serie $\Sigma f_n(x)$ es uniformemente convergente, tomado un número $\varepsilon > 0$ existe N tal que

$$|s_n(x)-S(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{para todo} \quad n > N$$

y en todos los puntos del intervalo (a,b). De donde tomando x_1 y x_1+h se tiene:

$$|s_n(x_1) - S(x_1)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{para} \qquad n > N$$

$$|a_{n+1}(x_1+h) - S(x_1+h)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para} \qquad n > N$$

Elijamos ahora un número η tal que para todo $n>N$ se tenga

$$s_n(x_1+h) - s_n(x_1) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{siendo} \quad |h| \leq \eta$$

ello puede hacerse opuesto que la función $s_n(x)$ es continua. De todo lo precedente se desprende entonces que:

$$|S(x_1+h)-S(x_1)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad \text{para} \quad |h| < \eta$$

lo que es prueba al teorema .

Teorema 151.-

Sea la serie de funciones $\Sigma f_n(x)$ tal que cada $f_i(x)$ es una función acotada en (a,b). Si existe una serie convergente de términos positivos y constantes ΣM_n tal que $|f_i(x)| \leq M_i$ para todas los valores de x en (a,b), entonces la serie $\Sigma f_n(x)$ es uniforme y absolutamente convergente en (a,b) .

D.-

Puesto que la serie ΣM_n es convergente se tiene que:

$$M_{n+1} + M_{n+2} + \ldots\ldots + M_{n+p} < \varepsilon$$

para $n>N$ y para todos los enteros positivos p. Pero como por hipótesis cada $f_i(x)$ es tal que $|f_i(x)| \leq M$ para todo x de (a,b) resulta:

$$|f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \ldots\ldots + |f_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

y como esta desigualdad es independiente del valor de x en el intervalo (a,b), se sigue que la serie $\Sigma f_n(x)$ es uniforme y absolutamente convergente en (a,b).

Este teorema se conoce con el nombre de criterio de Weierstrass

Teorema 152.-
Si la serie $\Sigma f_n(x)$ converge uniformemente para $a<x<b$ y si cada función $f_n(x)$ tiende a un límite l_n, cuando x tiende a algún punto c del intervalo (a,b) resulta que la serie Σl_n es convergente y además.

$$\lim_{x \to c} \Sigma f_n(x) = \Sigma \lim_{x \to c} f(x)$$

D.-
Puesto que $\Sigma f_n(x)$ es uniformemente convergente, existe un N tal que para todo x de (a,b) se tiene:

$$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon \quad \text{con} \quad n>N$$

de donde

$$\lim_{x \to c} |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq \varepsilon$$

o sea

$$|l_{n+1} + l_{n+2} + \ldots\ldots + l_{m+p}| < \varepsilon$$

lo que nos indica que la serie $\sum l_n$ es convergente.

Sean ahora $r_n(x)$ y r_n los restos de las series $\sum f_n(x)$ y $\sum l_n$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} l_n = \sum_{1}^{\bar{n}} f_n(x) + r_n(x) - \sum_{1}^{\bar{n}} l_n - r_n$$

o sea

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} l_n = \sum_{1}^{\bar{n}} \left[f_n(x) - l_n\right] + r_n(x) - r_n$$

donde $\bar{n}$ ha sido elegido de tal modo que $r_n(x)$ y r_n sean cada uno de ellos menores que $\frac{\varepsilon}{3}$, lo cual es posible por la convergencia uniforme de $\sum f_n(x)$ y por la convergencia de $\sum l_n$. Ahora puesto que $f_n(x)$ tiende hacia l_n, se puede elegir un η tal que

$$\left|\sum_{1}^{\bar{n}} \left[f_n(x) - l_n\right]\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{para} \quad |x-c| < \eta$$

y como

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} l_n\right| \leqslant \left|\sum_{1}^{\bar{n}} \left[f_n(x) - l_n\right]\right| + |r_n(x)| + |r_n|$$

resulta

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} l_n\right| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad |x-c| < \eta$$

o sea:

$$\lim_{x\to c} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to c} f_n(x)$$

96.- Series de potencias.- En este párrafo diremos algunas palabras sobre un importante grupo de series de funciones conocidas con el nombre de series de potencias. Llamamos series de potencias a las series de la forma:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n+\ldots\ldots$$

Los números reales a_1 , a_2 , ..., a_n , ... reciben el nombre de coeficientes de la serie y se comprende que el conocimiento de ellas es suficiente para tener la serie, es decir la serie está dada cuando se dan sus coeficiente.

La totalidad de los valores de x para los cuales la serie es convergente recibe el nombre de dominio de convergencia. Se comprende sin dificultad que toda serie de potencias converje para $x=0$ cualesquiera que sean los a_n . Por otra parte existe series de potencias que no converjen para ningún valor de x, exceptuando el valor $x=0$. Ese efecto para la serie

$$\sum n!\, x^n = 1+x+2!x^2+3!x^3+\ldots\ldots\ldots$$

se tiene:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{n!}{(n-1)!}\cdot\frac{x^n}{x^{n-1}}\right| = |nx|$$

expresión que tiende a infinito para todo x, excepto para $x = 0$.

Teorema 153.-

Si la serie de potencias $a_n x^n$ es convergente para $x = x_0 \neq 0$, entonces ella es absolutamente convergente para todo $|x|<|x_0|$. Análogamente si la serie es divergente para $x = x_0 \neq 0$ entonces ella lo es también para todo $|x|>|x_0|$.

D.-

Consideremos la serie $\Sigma a_n x^n$ y supongámosla convergente para $x = x_1 \neq 0$, entonces necesariamente se tendrá que $u_n = a_n x^n$ deberá tender a cero cuando n crezca constantemente, de aquí entonces que deberá existir un número M tal que:

$$|a_n x_0^n| < M \qquad \text{para todo } n > 0$$

luego

$$\Sigma|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

de donde para todo $|x|<|x_0|$, se tendrá que la serie

$$\Sigma|a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots\dots$$

será convergente.

La demostración de la segunda parte del teorema es ahora inmediata, en efecto supongamos que la serie diverge para $x = x_0 \neq 0$, si ella fuese convergente para un $|x| > |x_0|$ entonces de acuerdo con lo ya demostrado ella debería ser convergente para x_0, lo que es contrario a la hipótesis.

Teorema 154.- Dada la serie de potencias $\Sigma a_n x^n$ existe un número R tal que para todo $|x| < R$ la serie es absolutamente convergente y para todo $|x| > R$ ella es divergente.

D.- Consideremos la serie $\Sigma |a_n x^n|$ y sea $x_1 \neq 0$ un número real para el cual la serie es convergente. Clasifiquemos el conjunto de los números reales positivos en dos clases, colocando en la clase inferior, todos los x tales que para ellos la serie $\Sigma |a_n x^n|$ sea convergente y en clase superior el resto de los números reales positivos.

Se comprende que de acuerdo con esta clasificación que todo número real pertenece a alguna de las dos clases, que ambas clases no son vacías y finalmente, teniendo presente el teorema anterior, que todo número de la clase inferior es menor que todo número de la clase superior.

De aquí entonces que esta clasificación defina un número real R tal que $\Sigma a_n x^n$ converge absolutamente para todo $|x| < R$ y no converge si $|x| > R$. Nada se dice para $|x| = R$.

Finalmente si la serie converge solo para $x = 0$, entonces pondremos $R = 0$ y si la serie converje para todo número real pondremos $R = \infty$

Este número R cuya existencia hemos demostrado se conoce con el nombre de radio de convergencia de la serie y el intervalo $(-R, R)$ se llama intervalo de convergencia.

Teorema 155.- Si la sucesión $\sqrt[n]{|a_n|}$ admite un límite $\ell \neq 0$, se tiene que $R = \frac{1}{\ell}$.

D.- Sea la serie de potencias $\sum a_n x^n$; de acuerdo con el criterio de Cauchy ella es absolutamente convergente para todo x tal que:

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| < 1$$

o sea la serie converge para todo x tal que:

$$\ell \cdot |x| < 1 \qquad \text{(a)}$$

y diverge para todo x tal que:

$$\ell \cdot |x| > 1 \qquad \text{(b)}$$

de aquí entonces que de acuerdo con la definición de radio de convergencia de una serie se tiene:

$$R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{con} \quad \ell \neq 0$$

Si $\ell = 0$, la desigualdad (a) se satisface para todo x

y en tal caso el radio de convergencia es infinito. Si l es infinito de acuerdo con la desigualdad (b) se sigue que la serie diverge para todo $x \neq 0$ y en tal caso $R = 0$.

Conviene notar que la no existencia del límite de $\sqrt[n]{|a_n|}$ diferente de infinito no es motivo para creer que no exista R. A este respecto podemos decir que se demuestra (ver por ejemplo Advance Cálculus - Iván Sokolnikoff) que si la sucesión $\sqrt[n]{|a_n|}$ tiene un límite superior ($\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}$) entonces el radio de convergencia de la seri $\sum a_n x^n$ es el recíproco de este límite.

En práctica es generalmente más cómodo determinar el radio de convergencia aplicando el criterio de D'Alambert, pues el Teorema 134 nos capacita para usarlo con este fin. Se tendrá entonces:

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

y la serie correspondiente será absolutamente convergente en $(-R, R)$.

Teorema 156.-

Si la serie $\sum a_n x^n$ tiene un radio de convergencia R, entonces la serie $\sum n a_n x^{n-1}$ también lo tiene.

D.-

Puesto que la serie $\sum a_n x^n$ tiene un radio d convergencia R, este número es el límite superior de la sucesión $\left[\sqrt[n]{|a_n|}\right]$.

Por otra parte como $\sqrt[n]{|n a_n|} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}$ y y puesto que $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, resulta que las sucesiones $\left[\sqrt[n]{|na_n|}\right]$ y $\left[\sqrt[n]{|a_n|}\right]$ tienen el mismo límite superior, lo que demuestra el teorema.

Una serie de potencias $\sum a_n x^n$ cuyo radio de convergencia es R, converge para todo número real $|x| < R$ y por consiguiente a cada x del intervalo $(-R, R)$ corre ponde un número S llamado suma de la serie, se vé pues que la serie $\sum a_n x^n$ define una función de x con el intervalo abierto $(-R, R)$. Cuando queramos hacer notar este hecho emplearemos la notación:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

De acuerdo con esta observación y con los teoremas establecidos en el párrafo 92 intitulado "Algebra de las series" podemos enunciar los teoremas:

<u>Teorema 157</u>.-

Si $\sum a_n x^n$ y $\sum b_n x^n$ son dos series convergentes que definen las funciones $f_a(x)$ y $f_b(x)$, entonces la suma de ellas converge hacia $f_a(x) + f_b(x)$ a lo memos en un intervalo común, a los intervalos de convergencia de las dos series.

<u>Teorema 158</u>.-

Si las series $\sum a_n x^n$ y $\sum b_n x^n$ convergentes definen las funciones $f_a(x)$ y $f_b(x)$, entonces el producto de ellas converge hacia $f_a(x) \cdot f_b(x)$ a lo menos en un intervalo común a los intervalos de convergencia de las dos series.

Teorema 159.-

Sea $R>0$ el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum a_n x^n$, entonces ésta serie converje absoluta y uniformemente en cada punto x de cualquiera intervalo (a,b) interior al intervalo $(-R, R)$.

D.-

Puesto que el intervalo (a,b) está contenido en el intervalo $(-R, R)$ se podrá elegir un x_0 positivo mayor que $|a|$, y que $|b|$ y menor que R con lo cual el intervalo (a,b) estará contenido en el intervalo $(-x_0, x_0)$ y por lo tanto para todo x de (a,b) se tendrá:

$$|a_n x^n| < |a_n x_0^n|$$

ynpuesto que la serie $\sum |a_n x_0^n|$ es de términos positivos y constantes, el teorema 151 nos asegura la convergencia absoluta y uniforme de la serie $\sum a_n x^n$ en el intervalo (a,b).

Corolario:

Una serie de potencias $\sum a_n x^n$ define una función continua para todo los valores de x de cualquier intervalo (a,b) contenido en el intervalo de convergencia $(-R, R)$

Este corolario es una consecuencia inmediata de los teoremas 150 y 159.

Teorema 160.-

La suma de la serie de potencias $\sum a_n x^n$ es una función que admite derivada en todas los puntos internos de su intervalo de convergencia y esta función derivada es la suma de la serie $\sum n a_n x^{n-1}$.

D.-

Tomemos dos puntos x y c interiores al intervalo de convergencia de la serie de potencias:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n x^n$$

entonces:

$$f(x) - f(c) = \sum a_n x^n - \sum a_n c^n$$

y debido a la convergencia absoluta de la serie resulta:

$$f(x) - f(c) = \sum a_n (x^n - c^n)$$

de donde

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \sum a_n \frac{x^n - a^n}{x - c}$$

o sea

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \sum a_n (x^{n-1} + x^{n-2} c + \dots + x c^{n-2} + c^{n-1})$$

y luego

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^{n-1} + x^{n-2} c + \dots \dots + x c^{n-2} + c^{n-1})$$

de donde

$$f'(c) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \lim_{x\to c} a_n(x^{n-1}+a^{n-2}c+\ldots\ldots+ x\, c^{n-2}+c^{n-1})$$

o sea

$$f'(c) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n c^{n-1}$$

y poniendo simplemente $c=x$ queda

$$f'(x) = \sum n\, a_n x^{n-1}$$

serie que de acuerdo con el teorema 156 es absolutamente convergente en el intervalo $(-R, R)$.

97.- <u>Series de Taylor y Maclaurin</u>.- En el capítulo X establecimos que si $f(x)$ era una función uniforme de x, tal que ella y sus $n-1$ primeros derivadas eran continuas en $a\leqslant x\leqslant a+h$, existiendo además $f^{(n)}(x)$ en $a<x<a+h$, se tenía:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1}(a)+R_n$$

y particularmente si $a=0$

$$f(h) = f(0) + \frac{h}{1} f'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0)+\ldots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n$$

Si ahora ocurriera que $f(x)$ es indefinidamente derivable en el intervalo $(a, a+h)$, se puede elegir n a voluntad y por consiguiente llevar R_n tan lejos como se quiera; si en estas condiciones el resto R_n tiende a cero cuando n tiende a infinito, las fórmulas precedentes se reducen a:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots\dots\dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots\dots$$

$$f(h) = f(0) + \frac{h}{1} f'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0) + \dots\dots\dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots\dots$$

y ellas expresan que las series de los segundos miembros son convergentes y tienden a $f(a+h)$ y $f(h)$ respecetivamente, en efecto: si designamos con S_n la suma de los n primeros términos de la fórmula de Taylor es necesario y suficiente para que la serie correspondiente converja hacia $f(a+h)$ que:

$$S_n \longrightarrow f(a+h) \qquad \text{cuando} \quad n \longrightarrow \infty$$

o sea que dado un $\varepsilon > 0$ exista un número $N(\varepsilon)$ tal que:

$$|S_n - f(a+h)| < \varepsilon \qquad \text{para} \quad n > N$$

ahora puesto que: $f(a+h) = S_n + R_n$. la condición necesaria y suficiente para la convergencia de la serie se reduce a:

$$|R_n| < \varepsilon \qquad \text{para} \quad n > N$$

o en palabras que R_n debe tender a cero cuando n tiende a infinito.

Existe un gran número de casos en donde se puede afirmar que el término complementario R_n tiende a cero cuando n aumenta indefinidamente, ellos son aquellos donde el valor absoluto de la derivada de orden cualquiera permanece inferior a un cierto número fijo K, cuando x varía en el intervalo $(a, a+h)$, pues en este caso se puede poner:

$$|R_n| < K \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}$$

y el segundo miembro representa el término general de una serie convergente. Entre estas funciones podemos citar la función $f(x) = e^x$ que por tener todas sus derivadas iguales a e^x admiten un mismo máximo en el intervalo considerado. También podemos citar aquí las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ cuyo valor absoluto como así también el de sus derivadas no sobrepasa la unidad.

De aquí entonces que podamos escribir:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ldots$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Habíamos establecido, tomando el resto de Lagrange que:

$$L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}(1+\theta x)^{-n}$$

La serie contenida en esta fórmula no es convergente cuando el valor absoluto de x es superior a uno, pues la razón del término de rango $(n+1)$ al precedente tiende hacia el límite x. Así x debe considerarse solo en el intervalo $(-1, +1)$.

Para conocer si el resto R_n tiende hacia cero cuando n tiende hacia infinito, distinguiremos dos casos, según que x sea positivo o negativo. Para esto pondremos el término complementario en la forma:

$$R_n = \frac{1}{n}\left[\frac{x}{1+\theta x}\right]^n$$

Si x es un valor positivo menor o igual a 1, $\frac{x}{x+\theta x}$ es una fracción propiamente dicha cuya potencia puede llegar a ser menor que cualquiera cantidad dada. El resto de la serie tiene pues cero por límite y la series es en tal caso convergente.

Si x es un valor negativo comprendido entre 0 y -1, pongamos $x = -z$, el término complementario tomará la forma:

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{z^n}{(1 - \theta z)^n} = \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{z}{1 - \theta z}\right]^n$$

Bajo esta forma, no se puede afirmar que le resto de la serie tienda a cero, puesto que no sabe si $\frac{z}{1 - \theta z}$ es una fracción propiamente dicha. Para evitar esta dificultad tomaremos para el resto la forma de Cauchy .

$$\frac{x^n}{(n-1)!} (1 - \theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x)$$

Reemplazando en este término complementario x por -z se obtiene:

$$\frac{z^n}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1}(n-1)! \, (1 - \theta z)^{-n}$$

sin tomar en cuenta el signo; o bien:

$$(z - \theta z)^{n-1} \frac{z}{(1 - \theta z)^n} = \left[\frac{z - \theta z}{1 - \theta z}\right]^{n-1} \cdot \frac{z}{1 - \theta z}$$

Como z es menor que la unidad, $\frac{z - \theta z}{1 - \theta z}$ es una fracción propiamente dicha y su potencia (n-1) ésima tiene por límite cero cuando n crece indefinidamente ; $\frac{z}{1 - \theta z}$ es además una cantidad finita inferior a $\frac{z}{1-z}$, el término complementario tiene pués cero por límite y la serie es convergente en el intervalo ya mencionado $-1 < x \leq +1$. Para $x = -1$ el primer y segundo miembro de la igualdad que estamos considerando se hacen $-\infty$.

El desarrollo que acabamos de establecer nos permitirá deducir fórmulas relativas al cálculo de logaritmos.

98.- Cálculo de logaritmos.- Siendo convergente la serie:

$$L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\dots\dots \qquad (a)$$

para todos los valores de x comprendidos en -1 exclusive y $+1$ inclusive, se puede cambiar x por $\frac{z}{N}$, designando por N y por $z < N$ dos números positivos cualqueira y así se tiene:

$$L(1+x) = L\left[1 + \frac{z}{N}\right] = L\frac{N+z}{N} = L(N+z) - LN$$

de donde:

$$L(N+z) = LN + \frac{z}{N} - \frac{z^2}{2N^2} + \frac{z^3}{3N^3} - \frac{z^4}{4N^4} + \dots\dots \qquad (b)$$

Cambiando x por $-x$ en la igualdad (a) con la condición de que x permanezca comprendido entre cero y uno, se tiene la nueva igualdad:

$$L(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots\dots \qquad (c)$$

Restando esta última igualdad (c) de la igualdad (a), se tiene:

$$L(1+x) - L(1-x) = L\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) \quad (d)$$

Como $\frac{1+x}{1-x}$ es más grande que 1, se puede poner, designando con z y N dos números positivos cualquiera.

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{z}{N} = \frac{N+z}{N}$$

de donde:

$$x = \frac{z}{2N+z}$$

El primer miembro de la relación (d) toma entonces la forma:

$$L\,\frac{N+z}{N} = L(N+z) - LN$$

de donde:

$$L(N+z) = LN + 2\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\dots\right]$$

o bien reemplazando en valor de x ya encontrado:

$$L(N+z) = LN + 2\left[\frac{z}{2N+z} + \frac{z^3}{3(2N+z)^3} + \frac{z^5}{5(2N+z)^5} + \dots\right] \quad (e)$$

Las fórmulas (b) y (e) nos permiten calcular el logaritmo neperiano del número N+Z , cuando se conoce el del número N . Haciendo en particular $z = 1$ en estas dos fórmulas, se tiene:

$$L(N+1) = LN + \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} \quad \frac{1}{3N^3} - \frac{1}{4N^4} + \ldots \qquad (f)$$

$$L(N+1) = LN + 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^3} + \ldots\right] \qquad (g)$$

En realidad es por medio de la serie (g) que se calculan los logaritmos neperianos. Haciendo primero, en la serie, N = 1, se tiene, ya que L 1=0 .

$$L = \frac{2}{3} + \frac{2}{3\cdot 3^3} + \frac{2}{5\cdot 3^5} + \frac{2}{7\cdot 3^7} + \ldots\ldots$$

Así ejecutando los cálculos de los diez primeros términos del segundo miembro, se obtiene:

$$L\,2 = 0{,}6931471806 \ldots\ldots$$

con sus diez decimales exactos.

Poniendo N=2 en la misma serie, resulta:

$$L\,3 = L\,2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{3\cdot 5^3} + \frac{2}{5\cdot 5^5} + \frac{2}{7\cdot 5^7} + \ldots\ldots$$

y haciendo los cálculos:

$$L\,3 = 1{,}0986122887.....$$

Para tener L 4 basta tener presente que

$L\,4 = L\,2^2 = 2\,L\,2$, así:

$$L\,4 = 2\,L\,2 = 1{,}3862943611........$$

Logaritmo de 5 se tiene inmediatamente poniendo $N = 4$. obteniéndose:

$$L\,5 = 1{,}6094379124.....$$

Si los logaritmos por calcular son vulgares se observa sin dificultad que:

$$e^{Lx} = 10^{\log x}$$

ya que ambos miembros, de acuerdo con la definición misma de logaritmos, representan la cantidad x, Tomando logaritmos naturales en ambos miembros resulta:

$$L\,e^{Lx} = L\,10^{\log x}$$

o bien:

$$L\,x = \log x \cdot L\,10$$

de donde:

$$\log x = \frac{L\,x}{L\,10}$$

y designando con $M = \frac{1}{L\,10}$, queda:

$$\log x = M \cdot L\, x$$

Esta relación nos indica que los logaritmos vulgares pueden obtenerse multiplicando los logaritmos neperianos por un número constante M que se llama módulo del sistema de los logaritmos de base 10.-

Las fórmulas del párrafo precedente nos permiten calcular M. En efecto:

$$L = 10 = L\, 5 \cdot 2 = L\, 5 + L\, 2$$

y como:

$$L\, 2 = 0.6931471806\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$L\, 5 = 1.6094379124\ldots\ldots\ldots\ldots$$

resulta:

$$L\, 10 = 2.3025850929\ldots\ldots\ldots\ldots$$

y luego:

$$M = \frac{1}{L\, 10} = 0.4342944819\ldots\ldots$$

Multiplicando ambos miembros de las igualdades (f) y (g) por M se obtiene:

$$M\, L(N+1) = M\, L\, N + M\left[\frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \frac{1}{4N^4} + \ldots\right]$$

$$M\, L(N+1) = M\, L\, N + 2M\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \ldots\right]$$

o bien:

$$\log (N+1) = \log N + M \left[\frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \frac{1}{4N^4} + \dots\dots \right]$$

$$\log (N+1) = \log N + 2M \left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \dots \right]$$

Finalmente como una última aplicación del desarrollo de funciones en series por medio de las series de Taylor y Maclaurin presentaremos:

99.- <u>Desarrollo de la fórmula del binomio para un exponente cualquiera.</u>-

Propongamos determinar el desarrollo de $(a+b)^m$, en el caso en que m es un número cualquiera.

La expresión $(a+b)^m$ es entonces susceptible de varios valores, excepto cuando m es un número entero positivo o negativo. Sin embargo si $(a+b)$ es positivo, uno de esos valores es real y positivo, éste será el único que nosotros consideraremos aquí:

Sea entonces:

$$(a+b)^m = a^m \left[1 + \frac{b}{a} \right]^m = a^m (1+x)^m$$

siendo $\frac{b}{a} = x$. La cuestión se reduce así a desarrollar la función:

$$f(x) = (1+x)^m$$

Se encuentra sin dificultad que:

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

y

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)$$

De acuerdo con esto, resulta inmediatamente, de la aplicación de la fórmula de Maclaurin que:

$$f(x) = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}x^{n-1} + R_n$$

siendo:

$$R_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots n}x^n(1+\theta x)^{m-n}$$

Se puede observar fácilmente que cuando x es mayor que 1 en valor absoluto, la serie obtenida haciendo abstracción del resto, es divergente, en efecto; la razón de dos términos consecutivos

$$u_n = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(n-1)}x^{n-1}$$

y

$$u_{n+1} = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+2)(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(n-1)\cdot n}x^n$$

tiene por expresión:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m-n+1}{n} x = \left[\frac{m+1}{n} - 1\right] x$$

Esta razón tiene por límite $-x$ cuando n crece indefinidamente y por consiguiente cuando el valor absoluto de x es mayor que 1, la serie es divergente. De aquí entonces que solo habrá convergencia cuando $|x|<1$ y sólo en este caso es necesario asegurarse de que el resto de la serie debe tener cero por límite.

Supongamos primero que x esté comprendido entre 0 y 1, es decir x positivo.

Se puede poner el resto en la forma:

$$R_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots.\ n} x^n. \frac{1}{(1+\theta x)^{n-m}}$$

El primer factor tiende a cero cuando n tiende a infinito, en efecto cuando n aumenta en una unidad, aparece el factor

$$\frac{m-n}{n+1} x = \frac{\frac{m}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n}} x$$

que tiene por límite $-x$ cuando n tiende a infinito, es decir llega a ser menor que 1 en valor absoluto. Se sigue de aquí que la cantidad de la cual nosotros hablamos es un producto en el cual los factores mayores que 1 en valor absoluto, son en número limitados, en tanto que el número de aquellos inferiores a 1 en valor absoluto, aumenta indefinidamente, por consiguiente el pro ducto tiene por límite cero. En cuanto al factor $\frac{1}{(1+\theta x)^{n-m}}$ el puede tener la unidad por límite, si el límite de θ es nulo, pero en ningún caso el superará la unidad. Resulta de esto que R_n tiende hacia cero si x es positivo e inferior a la unidad.

Supongamos ahora x comprendido entre 0 y -1, es decir negativo.

El razonamiento precedente no es aplicable porque el segundo factor indicado en la expresión del resto llega a ser mayor que 1 para n bastante grande y crece indefinidamente al mismo tiempo que n, al menos que θ no tienda simultáneamente hacia cero; y entonces ella tiende hacia el límite 1 permaneciendo superior a 1.

Es necesario en este caso recurrir a la forma del resto de Cauchy

$$R_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}x^n.(1+\theta x)^{m-1}\left[\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right]^{n-1}$$

Se demuestra como en el caso precedente que el primer factor tiene límite cero cuando n crece indefinidamente. En cuanto al segundo factor, se puede escribir reemplazando x por -z, puesto que x es negativo,

$$(1-\theta z)^{m-1}\left[\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right]^{n-1}$$

la fracción $\frac{1-\theta}{1-\theta z}$ es una fracción propia y su potencia (n-1) ésima tiende hacia cero o hacia la unidad cuando n tiende a infinito, en tanto que la potencia (m-1) ésima de la fracción $(1 - \theta z)$ permanece siempre finita. Resulta de lo dicho que el resto R_n tiende hacia cero.

Resumiendo podemos decir que para todos los valores de x comprendido entre -1 y $+1$, se tiene:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}x^n + \ldots$$

El análisis precedente muestra que la fórmula recién establecida tiene lugar para los valores de x comprendidos entre -1 y $+1$ pero no dice nada cuando $x = \pm 1$. Nosotros agregaremos aquí solamente que si $m+1$ es negativo la serie es divergente, de modo que para un estudio ulterior debe suponerse $m+1$ positivo.

Observación:

El uso de los teoremas de Taylor y Maclaurin para desarrollar funciones en series de potencias de la variable esta practicamente limitado por la dificultad en calcular las derivadas sucesivas en muchas funciones y por la tarbajosa manera en que en muchos casos, como los ya vistos, es posible demostrar que el resto tiende a cero; en otros casos esta discusión ofrece aún mayores dificultades. Por este motivo es conveniente cerciorarse antes de examinar R_n si la serie es convergente; si para los valores dados de a y h, esta serie es divergente no es necesario continuar el estudio: se puede afirmar que R_n no tiende a cero cuando n tiende a infinito. La afirmación recíproca de la precedente no es verdadera pues puede suceder que la serie obtenida sea convergente y no representa a la función que le ha dado nacimiento.

Consideremos la función $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ para

$x \neq 0$ y $f(x) = 0$ para $x = 0$ y propongamos desarrollarla según la fórmula de Maclaurin. Se tiene:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$$

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - F'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^4}\, e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

en general se encuentra $f^{(n)}(0) = 0$, luego el desarrollo se expresa por:

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

serie que es convergente para todo x, pero idénticamente nula, es obvio que la función $e^{-\frac{1}{x^2}}$ no es desarrollable en el origen:

Tomemos ahora la función $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} + e^x$, ella y todas sus derivadas son continuas y como:

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + e^x$$

siendo $f^{(n)}(0) = 0$ resulta $\varphi^{(n)}(0) = 1$, luego el desarrollo de $\varphi(x)$ es:

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots.$$

lo cual es también convergente para todo valor de x, pero ella converge hacia la suma $\varphi(x)$.

En general podemos decir que si dos funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son iguales como así también sus derivadas en $x = 0$ sin ser idénticas, es claro que una de ellas no es desarrollable en serie por la fórmula de Maclaurin, puesto que si lo fuera, los coeficientes de ambos desarrollos serían iguales.

100.- Ejercicios resuletos.-

a) Determinar para qué valores reales y positivos de la variable es convergente la serie $\sum \frac{n!}{(x+1)\cdot(x+2)\ldots(x+n)}$

La aplicación del criterio de D'Alambert es infructuoso. Aplicando el criterio de Raabe se tiene:

$$n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] = n\left[\frac{x+n+1}{n+1} - 1\right] = \frac{n}{n+1}\,x = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\,x$$

de donde:

$$\lim n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] = x$$

por lo tanto para $x>1$ la serie es convergente, para $x<1$ ella es divergente. Finalmente si $x = 1$ la serie se identifica con la serie harmónica privada de su primer término.-

b) Estudiar la serie $\frac{n}{1 + x^n}$

Si $x < 1$, entonces x^n tiende a cero y por consiguiente el término general tiende a infinito, de allí que en tal caso la serie sea divergente. Igual cosa ocurre sí $x = 1$. Notemos además que x no puede tomar el valor -1. Aplicando el criterio de D'Alambert a la serie de los valores absolutos, se tiene

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{n+1}{n} \cdot \frac{1+x^n}{1+x^{n+1}}\right| = \left|\left[1 + \frac{1}{n}\right] \cdot \frac{1 + \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{1}{x^{n+1}}}\right| \left|\frac{1}{x}\right|$$

y como ahora suponemos $|x| > 1$ resulta

$$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{1}{x}\right|$$

número menor que la unidad, de aquí entonces que la serie propuesta sea absolutamente convergente para todo $|x| > 1$

c) Estudiar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n x}{n^2}$

Puesto que $|\operatorname{sen} nx| < 1$, la convergencia de la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ nos asegura de acuerdo con el teorema

IMPRESO EN LA

FUNDACION PUBLICACIONES

DE LA

UNIVERSIDAD CATOLICA.

Lira 34 B.
Santiago

151 la convergencia uniforme, de la serie propuesta, en cualquier intervalo (a,b). De acuerdo con el teorema 150 esta serie define una función continua $S(x)$.

d) Estudiar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}}$

Pongamos para brevedad $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n}$,

entonces

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{s_n}{s_n + \frac{1}{n+1}}|x| = \frac{|x|}{1+\frac{1}{(n+1)s_n}}$$

lo que nos indica que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|$$

luego si

$|x| < 1$ la serie es convergente

$|x| > 1$ la serie es divergente

$x = -1$ la serie es de términos alternos y como sus términos van decreciendo en valor absoluto y además $u_n \to 0$ la serie es convergente. Finalmente consi el caso en que $x = 1$. Se tiene la serie:

$$1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} + \cdots\cdots + \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}} + \cdots\cdots$$

y aplicando el criterio de Rabbe:

$$n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] = n\left[\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}} - 1\right]$$

$$n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] = n\left[1 + \frac{1}{s_n(n+1)} - 1\right] = \frac{1}{s_n\left[1 + \frac{1}{n}\right]}$$

y como s_n tiende a infinito junto con n, resulta:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] = 0$$

lo que indica que la serie es divergente.

e) Determinar el desarrollo en serie de la función $f(x) = \operatorname{sen} h\, x$.

Se tiene:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots$$

de donde:

$$e^x - e^{-x} = 2\frac{x}{1!} + 2\frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots$$

luego

$$\operatorname{sen h} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

f) Desarrollar en serie la función $f(x) = \frac{L(1+x)}{1+x}$

Se tiene:

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots \quad \text{para} \quad -1 \leqslant x < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots\ldots \text{ para } -1 < x < 1$$

y multiplicando estas dos series se encuentra:

$$\frac{L(1+x)}{1+x} = x - \left[1 + \frac{1}{2}\right]x^2 + \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right]x^3 - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}\right)x^n \ldots\ldots$$

para $x < 1$.

g) Desarrollar en serie la función $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$

se tiene:

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{2-(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-x^3)} - \frac{1}{(1-x)^2}$$

Pero

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\ldots + x^n + \ldots\ldots$$

para $|x|<1$.

y derivando dos veces se obtiene:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots\ldots\ldots$$

para $|x|<1$.

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 2\cdot 3x + 3\cdot 4x^2 + \ldots\ldots + (n-1)n\, x^{n-2} + \ldots\ldots$$

para $|x|<1$

luego:

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = 1 + 4x + 9x^2 + \ldots\ldots + (n+1)^2\, x^n + \ldots\ldots$$

para $|x|<1$.

101.- Ejercicios propuestos.-

1.- Estudiar las series siguientes:

a) $\sum(1-\cos a\, x^n)$ b) $\sum\left(1-\cos \frac{x}{n^p}\right)$

c) $\sum \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots\ldots(1+x^n)}$ d) $\sum \frac{1}{1+x^n}$

e) $\sum \frac{x^n \operatorname{sen}^2\alpha \cdot \operatorname{sen}^2 2\alpha \ldots \operatorname{sen}^2 n\alpha}{(1+x\cos^2\alpha)(1+x\cos^2 2\alpha)\ldots\ldots(1+x\cos^2 n\alpha)}$

f) $\sum \frac{1}{n}\left[\frac{x}{x-1}\right]^n$

g) $\sum x^n \cos n x$ h) $\sum \frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

i) $\sum \frac{\cos 2n x}{(2n-1)(2n+1)}$ j) $\sum \frac{1}{2n-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}$

2.- Demostrar que la serie: $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x}{2\cdot 3}+\frac{x}{3\cdot 4}+\ldots.$
converge uniformemente para $0\leqslant x<b$.

3.- Demostrar que la serie: $\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2+x^2}+\frac{1}{3+x^2}-\ldots$
converge uniformemente para $x\geqslant 0$.

4.- Demostrar que la serie

$$\frac{x}{x+3} + \frac{x(x+2)}{(x+3)(x+5)} + \frac{x(x+2)(x+4)}{(x+3)(x+5)(x+7)} + \cdots\cdots$$

es convergente y tiene por suma x.

5.- Determinar el intervalo de convergencia de las series que se indican a continuación, estudiar las series en en los puntos extremos de estos intervalos.

a) $\sum \frac{n+1}{n^2+1} x^n$ b) $\sum \frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{n!} x^n$

c) $\sum (-1)^{n-1} n\, x^n$ d) $\sum \frac{b^{n-1}}{a^n} x^{n-1}$

e) $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ f) $\sum \frac{n^2}{2^{n-1}} x^{n-1}$

g) $\sum \frac{3^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1}$ h) $\sum \frac{1}{2^n} x^{n-1}$

i) $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} \frac{x^{2n-1}}{3^{2n-1}}$

j) $\sum (-1)^{n-1} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \;\ldots\ldots\; 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6 \;\ldots\ldots\; (n-1)} x^{2n-2}$

k) $\sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ l) $\sum \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5 \;\ldots\ldots\; \overline{2n-1}}{2\cdot 4\cdot 6 \;\ldots\ldots\; 2n}\right]^2 x^{2n}$

6.- Intervalo de convergencia de la serie $\sum n^n x^n$.

7.- Desarrollar en serie las funciones sen h x y co cos h x .

8.- Desarrollar en serie las funciones L(1+x) y L(1-x)

9.- Desarrollar en serie las funciones $L\,\frac{1+x}{1-x}$ y $L\frac{1-x}{1+x}$.

10.- Desarrollar én serie las funciones arc tg x y arc sen x .

11.- Desarrollar en serie las funciones $\frac{1}{1+x^2}$ y $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

12.- Desarrollar en serie la función $y = \frac{\text{arc sen } x}{1-x^2}$ estando el numerador comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$

13.- Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ tiene como serie e^x-1

14.- Demostrar que las series $\Sigma(-1)\ \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ y $\Sigma(-1)^n\ \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ tienen como sumas sen x y cos x respectivamente.

15.- Demostrar que:

$$(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n+\ldots\ldots)^2 = 1+2x+3x^2+\ldots\ldots+(n+1)x^n+\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}$$

16.- Desarrollar en serie la función $y = e^x \operatorname{sen} x$.

17.- Desarrollar en serie la función $y = \frac{x}{\operatorname{sen} x}$ para $x \neq 0$

18.- Demostrar que: $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$.

19.- Demostrar que $\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$ y $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$.

20.- Demostrar que $\operatorname{sen} h(x+iy) = \operatorname{senh} x \cos y$

$+ \; i \cosh x \operatorname{sen} y$.

21.- Demostrar que:

a) $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \ldots\right)$

$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} + \ldots\right)$

- oOo -

B I B L I O G R A F I A

1.- Advanced Calculus by: George GIBSON
2.- Pure Mathematics by: G. H. HARDY
3.- Advanced Calculus by: Iván SOKOLNIKOFF.
4.- A Course of Analysis by: E. G. PHILLIPS.
5.- Theory of Functions by: James PIERPONT.
6.- Analyse Mathématique par: De la Vallée POUSSIN.
7.- Analyse Mathématique par: Edouard GOURSAT.
8.- Calcolo Infinitesimale per: Salvatore PINCHERLE.
9.- Analisi Matematica per: Gulio VIVANTI.
10.- Análisis Algebraico por: J. Rey PASTOR.

- oOo -

I N D I C E

CURSO DE CALCULO INFINITESIMAL

Primera Parte

Pág.

CAPITULO VI.- CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

CAPITULO VII.- DERIVACION DE FUNCIONES EXPLICITAS DE UNA SOLA VARIABLE INDEPENDIENTE.

Pág.

CAPITULO X.- LAS FORMULAS DE TAYLOR Y MACLAURIN

CAPITULO XI.- FORMAS INDETERMINADAS

CAPITULO XII.- MAXIMOS Y MINIMOS DE FUNCIONES DE UNA SOLA VARIABLE REAL.

Pág.

CAPITULO XIII.- SERIE INFINITAS

- oOo -

Corrector de Pruebas: Sr. Mario R. Azócar